

УДК 534.121.2+539.382.2

М. В. Данилов, кандидат технических наук, докторант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова
 Д. Р. Шишов, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ И ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛЕНТОЧНОГО НОСИТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ, ДЕФОРМИРОВАННОГО ПРИ ЕГО ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Задачу о собственных колебаниях отрезка ленты, когда смещения происходят в плоскости самой ленты, проще всего рассматривать обобщенно, не исследуя вынужденные колебания ленты с использованием понятия потенциалов. При этом, следуя Лэмбу [1], решение можно записать в компактной форме.

Распределение смещений в деформированной ленте на низших формах колебаний соответствует динамическому изгибу и растяжению и переходит на высоких частотах в краевой эффект в пластине, адекватный известным рэлеевским волнам, что соответствует краевому эффекту в упругом полупространстве. Волны Рэлея – это особый вид упругих волн, распространяющихся вблизи поверхности тела и не проникающих вглубь вещества [2]. Соответствующий аналог в пластинке – это волны, распространяющиеся вдоль края и быстро убывающие при удалении от него [3].

При описании колебаний будем исходить из динамического уравнения движения пластины в векторной форме [4]:

$$\text{grad div } \mathbf{u} - \frac{1-\nu}{2} \text{rot rot } \mathbf{u} = \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} – смещение элементов пластины от положения равновесия; E, ν, ρ – соответственно, модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластинки.

Для решения задачи при помощи скалярного и векторного потенциалов полагаем, что

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1), получаем:

$$\text{grad} \left(\text{div grad } \varphi - \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) - \text{rot} \left(\frac{1-\nu}{2} \text{rot rot } \boldsymbol{\psi} + \rho \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Для удовлетворения этого уравнения достаточно принять

$$\text{div grad } \varphi - \frac{1}{c_l^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0, \quad \text{rot rot } \boldsymbol{\psi} + \frac{1}{c_t^2} \frac{d^2 \boldsymbol{\psi}}{dt^2} = 0,$$

где c_l – скорость продольных волн (по u_x) в пла-

стинке, равная $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$; c_t – скорость попе-

речной волны, перпендикулярной к направлению

распространения продольных волн в пластинке, со-

ставляющая $c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$.

Учитывая, что компоненты смещения в тонкой пластинке могут располагаться только в ее плоскости, определяем векторный потенциал $\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi) = \mathbf{k}\psi(x, y)$, где \mathbf{k} – орт, нормальный к пластинке.

Находим $\text{rot } \boldsymbol{\psi}$:

$$\text{rot } \boldsymbol{\psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \psi(x, y) \end{vmatrix} = \mathbf{i} \frac{d\psi}{dy} - \mathbf{j} \frac{d\psi}{dx}.$$

Далее определяем

$$\text{rot } \boldsymbol{\psi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} & -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right).$$

Таким образом, получаем волновые уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

При этом компоненты вектора смещений u_x и u_y , а также тензора напряжений будут выражаться через φ и ψ [5]:

$$\begin{cases} u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right); \\ \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right); \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right); \\ \sigma_{yx} &= \frac{E}{1+\nu} \left(2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Сформулируем постановку и решим конкретную граничную задачу. В случае свободных плоских монохроматических колебаний все величины имеют временной множитель $\exp(-i\omega t)$, который в дальнейшем во избежание лишних повторов будет опущен. Ищем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \varphi + k_l^2 \varphi = 0, \\ \Delta \psi + k_l^2 \psi = 0, \end{cases}$$

где $k_l = \frac{\omega}{c_l}$; $k_t = \frac{\omega}{c_t}$ (k – волновые векторы продольной и поперечной волн); ω – круговая частота колебаний упругих волн в пластинке со свободными краями (по y) при следующих граничных условиях (рис. 1):

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0, \\ \sigma_{yx} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \text{ при } y = \pm \frac{H}{2};$$

$$\begin{cases} u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ \sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \end{cases} \text{ при } x = 0, x = l.$$

Решение данной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_n(x, y) &= \varphi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \psi_n(x, y) &= \psi_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l}.\end{aligned}$$

При этом граничные условия (4) удовлетворяются самопроизвольно, а для функций $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений при $k = n\pi/l$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = (k^2 - k_l^2) \varphi, \\ \frac{d^2 \psi}{dy^2} = (k^2 - k_t^2) \psi. \end{cases}$$

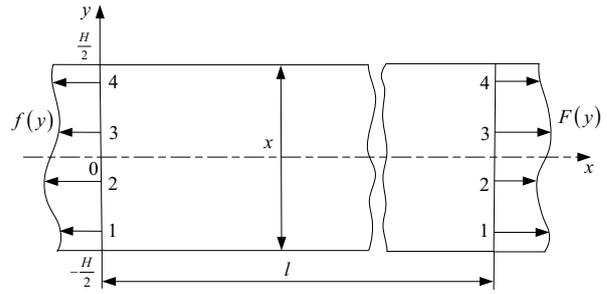


Рис. 1. Распределение действующих сил и геометрические параметры отрезка ленты

Соответствующие интегралы могут быть легко определены, однако для упрощения формы решения и дальнейших выкладок, следуя Лэмбу [6], можно записать решения, соответственно, в симметричной и антисимметричной относительно оси x формах:

а) симметричное, приводящее к векторному полю смещений, симметричному относительно оси x :

$$\begin{cases} \varphi_n(y) = \varphi_0 \operatorname{ch} y \sqrt{k^2 - k_l^2}, \\ \psi_n(y) = \psi_0 \operatorname{sh} y \sqrt{k^2 - k_t^2}; \end{cases}$$

б) антисимметричное, приводящее к векторному полю, при котором симметричные относительно оси x точки движутся противофазно:

$$\begin{cases} \varphi_n(y) = \varphi_0 \operatorname{sh} y \sqrt{k^2 - k_l^2}, \\ \psi_n(y) = \psi_0 \operatorname{ch} y \sqrt{k^2 - k_t^2}. \end{cases}$$

Далее перейдем к рассмотрению граничных условий на свободных краях ленты при $y = \pm H/2$. Находим соответствующие компоненты тензора напряжений симметричных волн:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\varphi_0 (k^2 - k_l^2 - \nu k^2) \operatorname{ch} y \sqrt{k^2 - k_l^2} - \right. \\ &\quad \left. - \psi_0 (1-\nu) k \sqrt{k^2 - k_t^2} \operatorname{ch} y \sqrt{k^2 - k_t^2} \right] \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yx} &= \frac{E}{1+\nu} \left[2\varphi_0 k \sqrt{k^2 - k_l^2} \operatorname{sh} y \sqrt{k^2 - k_l^2} - \right. \\ &\quad \left. - \psi_0 (2k^2 - k_t^2) \operatorname{sh} y \sqrt{k^2 - k_t^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (6)\end{aligned}$$

Из граничных условий (5) и (6) следует:

$$\begin{aligned}\varphi_0 \left((1-\nu) k^2 - k_l^2 \right) \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{k^2 - k_l^2} - \\ - \psi_0 \left((1-\nu) k \sqrt{k^2 - k_t^2} \operatorname{ch} \frac{H}{2} \sqrt{k^2 - k_t^2} \right) = 0; \\ \psi_0 \left(2k \sqrt{k^2 - k_l^2} \operatorname{sh} \frac{H}{2} \sqrt{k^2 - k_l^2} \right) - \\ - \psi_0 (2k^2 - k_t^2) \operatorname{sh} \frac{H}{2} \sqrt{k^2 - k_t^2} = 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\varphi_0}{\Psi_0} = \frac{(1-\nu)k\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{ch} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}}{\left((1-\nu)k^2-k_i^2\right) \operatorname{ch} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}} =$$

$$= \frac{(2k^2-k_i^2) \operatorname{sh} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}}{2k\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{sh} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}} = C_0.$$

Итак, получаем собственные формы (рис. 2, а) и соответствующие уравнения частот симметричных собственных колебаний:

$$\begin{cases} \varphi_n(y) = C_n(1-\nu)k\sqrt{k^2-k_i^2} \times \\ \times \operatorname{ch} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{ch} y\sqrt{k^2-k_i^2}, \\ \Psi_n(y) = C_n\left((1-\nu)k^2-k_i^2\right) \times \\ \times \operatorname{ch} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{sh} y\sqrt{k^2-k_i^2}; \end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{th} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}}{\operatorname{th} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}} = \frac{\left(k^2 - \frac{k_i^2}{2}\right)^2}{k^2\sqrt{k^2-k_i^2}\sqrt{k^2-k_i^2}}.$$

Аналогичным путем определяем собственные формы (рис. 2, б) и соответствующие уравнения частот антисимметричных собственных колебаний:

$$\begin{cases} \varphi_n(y) = C_n(1-\nu)k\sqrt{k^2-k_i^2} \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{sh} y\sqrt{k^2-k_i^2}, \\ \Psi_n(y) = C_n\left((1-\nu)k^2-k_i^2\right) \times \\ \times \operatorname{sh} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2} \operatorname{ch} y\sqrt{k^2-k_i^2}; \end{cases}$$

$$\frac{\operatorname{th} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}}{\operatorname{th} \frac{H}{2}\sqrt{k^2-k_i^2}} = \frac{\left(k^2 - \frac{k_i^2}{2}\right)^2}{k^2\sqrt{k^2-k_i^2}\sqrt{k^2-k_i^2}}. \quad (7)$$

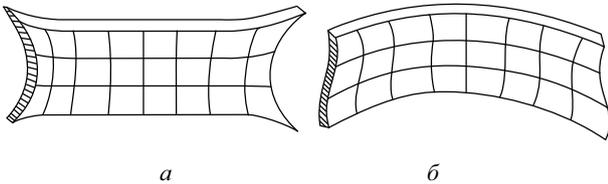


Рис. 2. Формы собственных колебаний:
а – симметричная; б – антисимметричная

Решение найдено с точностью до произвольной C_n , определяемой при конкретном разложении функции по собственным формам.

Для определения численных величин u_x и u_y найденные значения потенциалов φ и ψ должны быть подставлены в соотношения (3).

Поскольку классическая изгибная волна получается при условии $kH \ll 1$, то естественно ожидать, что антисимметричная волна на низких частотах является плоской поперечной, а симметричная – продольной (юнгвской). Полагая, что $(k_i H)^2 = y \ll 1$, $(kH)^2 = x \ll 1$, $(k_i/k)^2 = \eta = \frac{1-\nu}{2}$, разлагаем тангенсы уравнения частот собственных антисимметричных колебаний (7) в ряд:

$$\frac{\operatorname{th} \frac{1}{2}\sqrt{x-y}}{\operatorname{th} \frac{1}{2}\sqrt{x-\eta y}} = \frac{\sqrt{x-y} \left(1 - \frac{x-y}{3} \frac{1}{2^2}\right)}{\sqrt{x-\eta y} \left(1 - \frac{x-\eta y}{3} \frac{1}{2^2}\right)}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$(x-y)x \left(1 - \frac{x-y}{12}\right) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{x-\eta y}{12}\right),$$

откуда, опуская сравнительно малые члены, выводим уравнение частот антисимметричных собственных колебаний магнитной ленты:

$$\omega = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{H}{\sqrt{12}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Аналогично в случае симметричных собственных колебаний получаем уравнение

$$\omega = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Величина $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ соответствует скорости распространения продольных волн в стержне.

В случае, когда $kH \gg 1$, получаем высокочастотные формы, вырождающиеся в краевой эффект, что соответствует рэлеевским волнам смещения вдоль свободного края пластинки в плоскости самой пластинки (рис. 3). При этом уравнение частот переходит в следующее:

$$\frac{\left(k^2 - \frac{k_i^2}{2}\right)^2}{k^2\sqrt{k^2-k_i^2}\sqrt{k^2-k_i^2}} = 1. \quad (8)$$

Пусть $\eta = k_i/k$, а $\xi = k_i/k_i$, тогда, заменив переменные и возведя в квадрат, преобразуем уравнение (8):

$$\eta^8 - 8\eta^6 + 24\eta^4 - 16(1+\xi^2)\eta^2 + 16\xi^2 = 0.$$

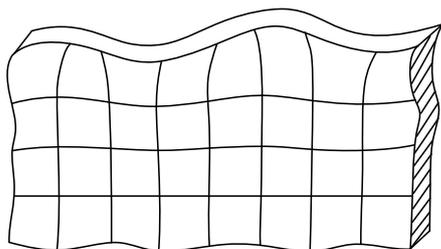


Рис. 3. Рэлеевские волны смещения в плоскости пластинки

Полученное уравнение полностью соответствует известному уравнению, описывающему движение рэлеевских волн [7]. Отличие состоит лишь в том, что величина $\xi = c_t/c_l = k_l/k_t$ в данном случае равна $\sqrt{(1-\nu)/2}$, а в случае рэлеевских волн $\xi = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$. Учитывая это, при скорости распространения краевой волны в пластинке $c_R = c_t - \frac{0,87 + 2\nu}{1 + 2\nu}$.

В случае когда коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$, получаем $\eta = c_R/c_t = 0,907$, а при $\nu = 0,3$ – $\eta = c_R/c_t = 0,919$.

Если края ленты идеально закреплены по оси y , приходим к аналогичной краевой задаче, граничные условия для которой имеют вид

$$\begin{cases} u_x = 0, \\ \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \text{ при } x = 0, x = l.$$

При постановке данной краевой задачи получаем решения, аналогичные предыдущему случаю с той лишь разницей, что

$$\begin{cases} \varphi_n(x, y) = \varphi_n(y) \cos \frac{n\pi x}{l}, \\ \psi_n(x, y) = \psi_n(y) \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{cases}$$

где функции $\varphi_n(y)$ и $\psi_n(y)$ определяются теми же соотношениями, что и в предыдущем случае. При этом картина распределения смещений в ленте не изменяется, меняются лишь уравнения частот.

Важно отметить, что при креплении торцевых краев в реальных условиях имеет место некоторая комбинация граничных условий рассмотренных двух предельных случаев. Так как решения задач о частотах собственных колебаний в предельных случаях совпадают с классическими решениями [8], то, следовательно, при креплении ленты в реальных условиях соответствующие уравнения частот должны приводить к достаточно точным результатам.

Библиографические ссылки

1. Lamb H. On Waves in an Elastic Plate. – Royal Society. London, Proceedings. Series A. – 1917. – Vol. 93. – No. A 648.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – Изд. 5-е. – М.: Физматлит, 2003. – 264 с.
3. Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей). Теория звука. – Т. 1, 2. – М.: Гостехиздат, 1955. – 504 с.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Указ. соч.
5. Lamb H. Указ. соч.
6. Там же.
7. Стретт Дж. В. Указ. соч.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Указ. соч.