

26. Лыков А. В. Указ. соч.  
 27. Закон Ньютона – Рихмана.  
 28. Исакова О. П., Тарасевич Ю. Ю., Юзюк Ю. И. Обработка и визуализация данных физических экспериментов с помощью пакета Origin. – М. : ЛИБКОМ, 2009. – 136 с.

29. Ярышев Н. А., Андреева Л. Б. Указ. соч.  
 30. Егоров В. И., Кораблев В. А., Шарков А. В. Указ. соч.  
 31. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Указ. соч.  
 32. Денисенко В. В. Указ. соч.

Получено 24.03.2015

УДК 534.121.2+539.382.2

**М. В. Данилов**, кандидат технических наук, докторант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова  
**Д. Р. Шишов**, аспирант, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова  
**В. Е. Лялин**, доктор технических наук, доктор экономических наук, доктор геолого-минералогических наук, профессор, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛЕНТОЧНОГО НОСИТЕЛЯ ИНФОРМАЦИИ В СТАТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

Для оценки величин удлинения ленты проводились экспериментальные и теоретические исследования деформации упругой магнитной ленты под воздействием нагрузки, распределенной по ее торцевым концам. При этом решались точные уравнения теории упругости для плоского деформированного состояния тонкой пластинки [1]. Обратимся к уравнениям равновесия, записанным в перемещениях:

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = 0, \\ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала;  $u_x$  и  $u_y$  – продольная и поперечная компоненты вектора смещения.

Далее запишем граничные условия, соответствующие свободным горизонтальным и торцевым кромкам, нагруженным растягивающими погонными силами  $f_1(y)$  и  $f_2(y)$ , вместе с условием отсутствия вертикального смещения на торцевых линиях (рис. 1):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = 0, \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{H}{2}; \\ \sigma_{xx} = \frac{1}{\delta} f_1(y), u_y = 0 \quad \text{при } x = 0; \\ \sigma_{xx} = \frac{1}{\delta} f_2(y), u_y = 0 \quad \text{при } x = l. \end{aligned}$$

Выражая компоненты тензора напряжения через компоненты тензора напряжений, согласно закону Гука записываем [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = 0, \\ \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{при } y = \pm \frac{H}{2}; \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{1}{\delta} f_1(y), \\ u_y = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = 0; \quad (3)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{1}{\delta} f_2(y), \\ u_y = 0 \end{cases} \quad \text{при } x = l. \quad (4)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  – соответствующие компоненты тензора напряжения;  $\delta$  – толщина ленты.

Таким образом, задача сводится к отысканию перемещений  $u_x$  и  $u_y$ , по которым в соответствии с уравнениями (2)–(4) определим напряжения.

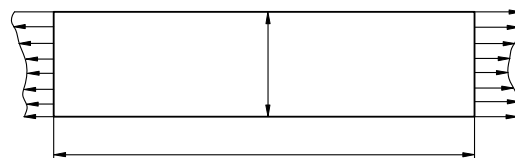


Рис. 1. Действие погонных сил на ленту:  
 $l$  – длина ленты;  $H$  – ширина ленты

Для аналитического решения задачи воспользуемся заменой переменных. Заменяем искомые компоненты перемещений  $u_x$  и  $u_y$  новыми функциями:

$$u_x(x, y) = u'_x(x, y) + \frac{(1-\nu^2)}{E\delta} \left( \frac{x^2}{2l} (f_2(y) - f_1(y)) + x f_1(y) \right), \quad (5)$$

$$u_y(x, y) = u'_y(x, y).$$

В результате этой замены, как видим, уравнения равновесия (1) принимают неоднородный вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u'_y}{\partial x \partial y} = \\ = -\frac{1}{E\delta l} (f_2(y) - f_1(y)) - \\ - \frac{(1-\nu)}{2E\delta} \left( \frac{x^2}{2l} (\ddot{f}_2(y) - \ddot{f}_1(y)) + x \dot{f}_1(y) \right), \\ \frac{1}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 u'_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u'_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x \partial y} = \\ = -\frac{1+\nu}{E\delta l} \left( \frac{x}{l} (\dot{f}_2(y) - \dot{f}_1(y)) + \dot{f}_1(y) \right). \end{cases} \quad (6)$$

Граничные условия (3) и (4) становятся при этом однородными:

$$\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{du'_x}{\partial x} + \nu \frac{du'_y}{\partial y} \right) = 0, \quad u_y = 0 \quad \text{при } x = 0;$$

$$\frac{E}{(1-\nu^2)} \left( \frac{du'_x}{\partial x} + \nu \frac{du'_y}{\partial y} \right) = 0, \quad u_y = 0 \quad \text{при } x = l.$$

Несмотря на кажущееся усложнение, произведенная замена приводит к решению, так как допускает разделение переменных. Решение задачи будем искать в виде рядов Фурье. Заданную в промежутке  $[0, l]$  функцию при соблюдении известных условий оказывается возможным разлагать в ряд как по косинусам, так и по синусам [3]. Используя ортогональность этих систем функций, записываем:

$$u'_x(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{xn}(y) \cos \frac{n\pi x}{l}; \quad (7)$$

$$u'_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} V_{yn}(y) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8)$$

Коэффициенты Фурье определяются по формулам:

$$V_{xn}(y) = \frac{2}{l} \int_0^l u'_x(x, y) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$V_{x0}(y) = \frac{1}{l} \int_0^l u'_x(x, y) dx;$$

$$V_{yn}(y) = \frac{2}{l} \int_0^l u'_y(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Граничные условия на торцах ленты удовлетворяются тождественно, и для функций  $V_{xn}$  и  $V_{yn}$  получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{d^2 V_{xn}(y)}{dy^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{V_{xn}(y)}{1-\nu^2} + \\ + \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{yn}(y)}{dy} = q_n(y), \\ - \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{xn}(y)}{dy} + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{d^2 V_{yn}(y)}{dy^2} - \\ - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{2(1+\nu)} V_{yn}(y) = p_n(y). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $q_n(y)$  и  $p_n(y)$  – коэффициенты Фурье правых частей уравнений (6). Вследствие ортогональности семейства функций (7) и (8) все интегралы под знаком суммы, кроме одного при  $k = n$ , обращаются в нуль, поэтому остается найти только величины  $q_n(y)$ ,  $p_n(y)$  и  $q_0(y)$ :

$$q_n(y) = -\frac{(1-\nu)l}{\pi^2 E\delta} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} \ddot{f}_2(y) - \frac{1}{n^2} \ddot{f}_1(y) \right);$$

$$p_n(y) = -\frac{(1+\nu)l}{\pi E\delta} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n} \dot{f}_2(y) + \frac{1}{n} \dot{f}_1(y) \right);$$

$$q_0(y) = -\frac{1}{E\delta l} (f_2(y) - f_1(y)) - \frac{(1-\nu)l}{4E\delta} \left( \frac{1}{3} \ddot{f}_2(y) + \frac{2}{3} \ddot{f}_1(y) \right).$$

Находим общее решение полученной однородной системы уравнений (9):

$$\begin{cases} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{d^2 V_{xn}(y)}{dy^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{(1-\nu^2)} V_{xn}(y) + \\ + \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{yn}(y)}{dy} = 0, \\ - \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{xn}(y)}{dy} + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{d^2 V_{yn}(y)}{dy^2} - \\ - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{2(1+\nu)} V_{yn}(y) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Как обычно, решение ищется в виде  $V_x = V_{x0} e^{\lambda y}$ ,  $V_y = V_{y0} e^{\lambda y}$ , и задача сводится к поиску корней характеристического биквадратного уравнения:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\lambda^2}{2(1+\nu)} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{(1-\nu^2)} \right) \left( \frac{\lambda^2}{(1-\nu^2)} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{2(1+\nu)} \right) + \\ & + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\lambda^2}{4(1-\nu)^2} = 0. \end{aligned}$$

Решение его имеет элементарное выражение:

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4 = 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{n\pi}{l}; \lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{n\pi}{l}.$$

Перейдем к рассмотрению неоднородной системы. Проще всего ее решить, сведя задачу к решению одного уравнения для  $V_{yn}$  или  $V_{xn}$  более высокого порядка. Так, исключая значение из системы уравнения (9), получаем

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{(1-v^2)} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{2(1+v)} \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{2(1+v)} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{(1-v^2)} \right) V_{yn} + \\ & + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{4(1-v^2)} \frac{d^2}{dy^2} V_{yn}(y) = \\ & = \left(\frac{n\pi}{l}\right) \frac{1}{2(1-v)} \frac{d}{dy} q_n(y) + \\ & + \left( \frac{1}{2(1+v)} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{(1-v^2)} \right) p_n(y). \end{aligned} \quad (11)$$

Выразим известную величину в правой части уравнения (11) значением  $\Phi_n(y)$ .

Частное решение данной системы неоднородных уравнений найдем методом вариации постоянных или с помощью интеграла Дюамеля [4] в виде свертки:

$$V_{yn}^*(y) = \int_{-H/2}^y \Phi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1, \quad \text{где } h_n(y-y_1) -$$

ядро свертки,  $h_n(y) = \frac{\lambda_n y \operatorname{ch} \lambda_n y - \operatorname{sh} \lambda_n y}{2\lambda_n^3}$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_n(y_1) = & \left( \frac{1}{2(1+v)} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{(1-v^2)} \right) p_n(y) + \\ & + \left(\frac{n\pi}{l}\right) \frac{1}{2(1-v)} \frac{d}{dy} q_n(y). \end{aligned}$$

Аналогичным способом находим

$$V_{xn}^*(y) = \int_{-H/2}^y \varphi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1,$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_n(y_1) = & \left( \frac{1}{2(1+v)} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \frac{1}{(1-v^2)} \right) q_n(y) + \\ & + \left(\frac{n\pi}{l}\right) \frac{1}{2(1-v)} \frac{d}{dy} p_n(y). \end{aligned}$$

Подставляем уравнения (5) в граничные условия (2) и, используя разложение, соответственно, по косинусам и синусам, при  $y = H/2$  и  $y = -H/2$  получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} V_{xn} \left(\frac{H}{2}\right) + \frac{n\pi}{l} V_{yn} \left(\frac{H}{2}\right) = \\ = -\frac{2l(1-v^2)}{\pi^2 E \delta} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} \dot{f}_2 \left(\frac{H}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \dot{f}_1 \left(\frac{H}{2}\right) \right), \\ \frac{d}{dy} V_{xn} \left(-\frac{H}{2}\right) + \frac{n\pi}{l} V_{yn} \left(-\frac{H}{2}\right) = \\ = -\frac{2l(1-v^2)}{\pi^2 E \delta} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} \dot{f}_2 \left(-\frac{H}{2}\right) - \frac{1}{n^2} \dot{f}_1 \left(-\frac{H}{2}\right) \right), \\ \frac{d}{dy} V_{yn} \left(\frac{H}{2}\right) - v \frac{n\pi}{l} V_{xn} \left(\frac{H}{2}\right) = \\ = -\frac{2v(1-v^2)}{\pi E \delta} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} f_2 \left(\frac{H}{2}\right) + \frac{1}{n} f_1 \left(\frac{H}{2}\right) \right), \\ \frac{d}{dy} V_{yn} \left(-\frac{H}{2}\right) - v \frac{n\pi}{l} V_{xn} \left(-\frac{H}{2}\right) = \\ = -\frac{2v(1-v^2)}{\pi E \delta} \left( \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} f_2 \left(-\frac{H}{2}\right) + \frac{1}{n} f_1 \left(-\frac{H}{2}\right) \right). \end{cases} \quad (12)$$

Запишем общее решение неоднородной системы [5]:

$$\begin{aligned} V_{xn}(y) = & c_{1n} e^{\lambda_n y} + c_{2n} \lambda_n y e^{\lambda_n y} + c_{3n} e^{-\lambda_n y} + \\ & + c_{4n} \lambda_n y e^{-\lambda_n y} + \int_0^y \Phi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1; \\ V_{yn}(y) = & c_{1n} e^{\lambda_n y} + c_{2n} \left( \lambda_n y - \frac{3-v}{1-v} \right) e^{\lambda_n y} + \\ & + c_{3n} e^{-\lambda_n y} + c_{4n} \left( \lambda_n y + \frac{3-v}{1+v} \right) e^{-\lambda_n y} + \\ & + \int_0^y \varphi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты находим из условий (12). После подстановки выражения (13) в уравнение (12), получим решение в замкнутом виде с учетом (5):

$$\begin{aligned} u_x(x, y) = & \frac{(1-v^2)}{E \delta} \left( \frac{x^2}{2l} (f_2(y) - f_1(y)) + x f_1(y) \right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \lambda_n y e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n} e^{-\lambda_n y} + \right. \\ & \left. + \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_n} \lambda_n y e^{-\lambda_n y} + \int_{-H/2}^y \varphi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1 \right) \cos \frac{n\pi x}{l}; \end{aligned}$$

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \left( \lambda_n y - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{\lambda_n y} - \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n} e^{-\lambda_n y} - \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_n} \left( \lambda_n y + \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{-\lambda_n y} + \int_{-H/2}^y \Phi_n(y_1) h_n(y-y_1) dy_1 \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

При сопоставлении теоретических и экспериментальных данных следует принять, что величина силы измеряется в отдельных точках по ширине ленты. Тогда краевые условия удобно аппроксимировать полиномами Вейерштрасса, что позволит ввести в аналитический расчет дискретную информацию.

В частном случае, например, когда измерения проводятся в четырех точках по ширине ленты (рис. 2), определяем:

$$y_1 = -3H/8; y_2 = -H/8; y_3 = H/8; y_4 = 3H/8.$$

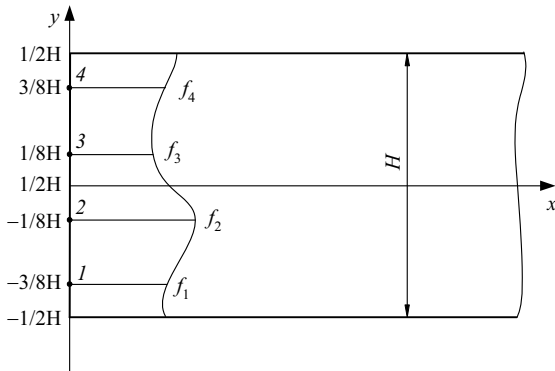


Рис. 2. Измерение величин силы по краю ленты

Измеренное значение силы при этом составляет, соответственно, величины  $f_1, f_2, f_3, f_4$ . Коэффициенты  $a_i$  полинома Вейерштрасса  $f(y) = a_3 y^3 + a_2 y^2 + a_1 y + a_0$  равны:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{7}{16}(f_3 + f_2) - \frac{1}{16}(f_4 + f_1); \\ a_1 &= \frac{4}{H}(13(f_3 - f_2) - 4(f_4 - f_1)); \\ a_2 &= \left(\frac{2}{H}\right)^2 (f_4 + f_1 - f_3 - f_2); \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{8}{4}\right)^3 ((f_4 - f_1) - 3(f_3 - f_2)). \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, поддающиеся аналитическому расчету. Допустим, силы, приложенные к торцам ленты (рис. 3), аппроксимируются аналитически:

$$f_1(y) = f_0 + f_\mu \sin(\mu y + \eta), f_2(y) = f_1(y).$$

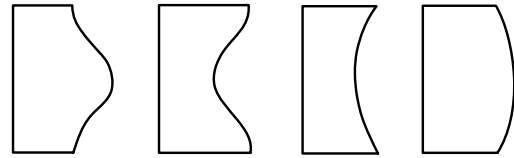


Рис. 3. Торцы ленты

В этом частном случае система (9) преобразуется:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{d^2 V_{xn}(y)}{dy^2} - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{V_{xn}(y)}{(1-\nu^2)} \right) + \\ & + \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{yn}(y)}{dy} = \\ & = -\frac{1-\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu^2 f_\mu \sin(\mu y + \mu); \quad (15) \\ & - \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{dV_{xn}(y)}{dy} + \frac{1}{1-\nu^2} \frac{d^2 V_{yn}(y)}{dy^2} - \\ & - \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{2(1+\nu)} V_{yn}(y) = \\ & = -\frac{1+\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu f_\mu \cos(\mu y + \mu). \quad (16) \end{aligned}$$

Частное решение неоднородной системы в данном случае находим в замкнутом виде:

$$\begin{aligned} V_{xn}^*(y) &= V_{xn0} \sin(\mu y + \mu), V_{yn}^*(y) = \\ &= V_{yn0} \cos(\mu y + \mu). \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь  $f_0, f_\mu$  – соответственно, постоянная и переменная составляющие силы. Подставив выражения (17) в уравнения (15) и (16), получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\mu^2}{2(1+\nu)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{(1-\nu^2)} \right) V_{xn0} + \\ & + \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{\mu}{2(1-\nu)} V_{yn0} = \frac{1-\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu^2 f_\mu; \\ & \left( \frac{n\pi}{l} \right) \frac{\mu}{2(1-\nu)} V_{xn0} + \left( \frac{\mu^2}{(1-\nu^2)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\mu}{2(1+\nu)} \right) V_{yn0} = \\ & = \frac{1+\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu f_\mu; \\ & V_{xn0} = \left( \frac{1-\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu^2 f_\mu \right) \left( \frac{n\pi}{l} \frac{\mu}{2(1-\nu)} \right) = \\ & = \left( \frac{1+\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu f_\mu \right) \left( \frac{\mu^2}{1-\nu^2} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\mu}{2(1+\nu)} \right) / \\ & / \left( \left( \frac{\mu^2}{(1-\nu^2)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\mu}{2(1+\nu)} \right) \left( \frac{\mu^2}{2(1+\nu)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left( \frac{n\pi}{l} \frac{\mu}{2(1-\nu)} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

$$V_{yn0} = \left( \frac{1-\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu^2 f_\mu \right) \left( \frac{\mu^2}{2(1+\nu)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{\mu}{(1-\nu^2)} \right) =$$

$$= \left( \frac{1+\nu}{\pi E \delta} \frac{(-1)^n - 1}{n} \mu f_\mu \right) \left( \frac{n\pi}{l} \frac{\mu}{2(1-\nu)} \right) /$$

$$/ \left( \left( \frac{n\pi}{l} \frac{\mu}{2(1-\nu)} \right)^2 - \left( \frac{\mu^2}{1-\nu^2} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{2(1+\nu)} \right) \right) \times$$

$$\times \left( \frac{\mu^2}{2(1+\nu)} + \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{1-\nu^2} \right).$$

Запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$V_{xn}(y) = c_{1n} e^{\lambda_n y} + c_{2n} \lambda_n y e^{\lambda_n y} + c_{3n} e^{-\lambda_n y} + c_{4n} \lambda_n y e^{-\lambda_n y} + V_{xn0} \sin(\mu y + \mu); \quad (18)$$

$$V_{yn}(y) = c_{1n} e^{\lambda_n y} + c_{2n} \left( \lambda_n y - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{\lambda_n y} - c_{3n} e^{-\lambda_n y} - c_{4n} \left( \lambda_n y + \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{-\lambda_n y} + V_{yn0} \cos(\mu y + \mu). \quad (19)$$

Окончательное решение будет иметь вид

$$u_x(x, y) = \frac{(1-\nu^2)x}{E\delta} (f_0 + f_\mu \sin(\mu y + \mu)) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \lambda_n e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n} e^{-\lambda_n y} + \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_n} \lambda_n e^{-\lambda_n y} + V_{xn0} \sin(\mu y + \mu) \right] \cos \frac{n\pi x}{l};$$

$$u_y(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta_n} e^{\lambda_n y} + \frac{\Delta_{2n}}{\Delta_n} \left( \lambda_n y - \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{\lambda_n y} - \frac{\Delta_{3n}}{\Delta_n} e^{-\lambda_n y} - \frac{\Delta_{4n}}{\Delta_n} \left( \lambda_n y + \frac{3-\nu}{1+\nu} \right) e^{-\lambda_n y} + V_{yn0} \cos(\mu y + \mu) \right] \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Необходимо отметить, что проведенный расчет важен для области, примыкающей непосредственно к торцам ленты, где состояние существенно неоднородно (рис. 4). Однако это состояние распространяется только на область порядка ширины ленты (принцип Сен-Венана) и переходит в однородное. Поперечное смещение при этом определяется как

$$u_y(x, y) = \frac{\nu y}{\delta E H} \int_{-y}^{+y} f(y) dy, \text{ где } y = \pm H/2.$$

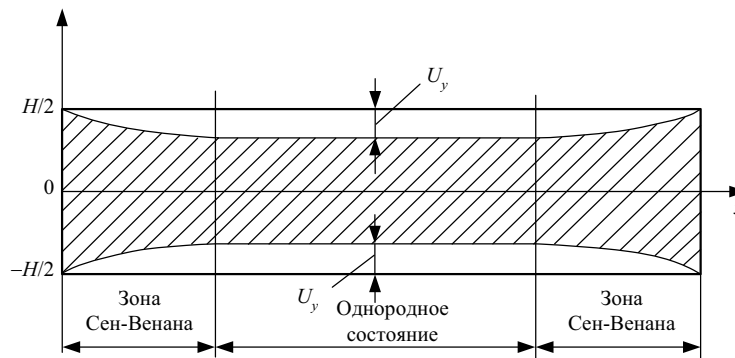


Рис. 4. Неоднородность состояния в области торцов ленты

Выделение действительных размеров области Сен-Венана до сих пор остается важнейшей проблемой теории упругости.

**Библиографические ссылки**

1. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – Изд. 5-е. – М.: Физматлит, 2003. – 264 с.  
 3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т. 2. – М.: Физматлит, 2001. – 810 с.  
 4. Краснов М. А., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Наука, 1971. – 256 с.  
 5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – Изд. 6-е. – М.: Изд-во МГУ, 1999. – 798 с.

Получено 27.02.15