МАТЕМАТИКА

УДК 512.831

В. П. Егоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Череповецкий государственный университет

КОНСТРУКЦИЯ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ ИНДЕКСА $K \geq 2$ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Определение 1.

Пусть A – $n\times n$-матрица. Матрица A называется *разложимой*, если

либо (a) $n = 1$ и $A = 0$,

либо (b) $n \geq 2$,

и существует $n\times n$-матрица перестановки P и некоторое целое число r, $1 \leq r \leq n - 1$, такое, что

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Здесь B – $r\times r$-матрица; D – $(n - r)\times(n - r)$-матрица; C – матрица размера $r\times(n - r)$ и 0 – матрица размера $(n - r)\times r$ – нулевая матрица.

Определение 2. *Неразложимой* называется $n\times n$-матрица A, не являющаяся разложимой.

Определение 3. Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m\times n$. Положим $|A| = (|a_{ij}|)$, $M(A) = (\mu_{ij})$, где $\mu_{ij} = 1$, если $a_{ij} \neq 0$ и $\mu_{ij} = 0$ при $a_{ij} = 0$. Матрица $M(A)$ называется *индикаторной матрицей* для A.

Определение 4. Ориентированный граф Γ *сильно связен*, если в нем любые два различных узла P_i, P_j соединены ориентированным путем конечной длины, начинающимся в P_i и кончающимся в P_j.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для $n\times n$-матрицы A следующие утверждения эквивалентны:

(a) A неразложима;

(b) $(I + |A|)^{n-1} > 0$;

(c) $(I + M(A))^{n-1} > 0$;

(d) граф $\Gamma(A)$ сильно связен.

Определение 5. Пусть A – неразложимая $n\times n$-матрица, и максимальный модуль $\rho(A) = |\lambda_1| > 0$ имеют k ее собственных значений. Если $k = 1$, то матрица A называется *примитивной*, если $k \geq 2$, то матрица A называется *импримитивной*. Число $k \geq 2$ называется *индексом импримитивности* матрицы A или просто *индексом* матрицы A.

Имеет место следующая теорема [1].

Теорема 2. Спектр неразложимой матрицы индекса k инвариантен при вращении через $2\pi/k$, но не через положительный угол, меньший чем $2\pi/k$.

Приведем так называемую форму Фробениуса неразложимых $n\times n$-матриц индекса $k \geq 2$ [2, 3, 4].

Теорема 3. Пусть A – неразложимая $n\times n$-матрица индекса $k \geq 2$, тогда для некоторой $n\times n$-матрицы перестановки P

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k-1,k} & 0 \\ A_{k,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где k нулевых блоков на главной диагонали квадратные, и показанные в формуле блоки A_{ij} единственные, которые могут быть ненулевыми. В частности, равны нулю все диагональные элементы a_{ij}.

Теорема 4. Следующая $n\times n$-матрица

$$A = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \qquad (1)$$

невырождена, неразложима, и максимальный модуль $\rho(A) = |\lambda_1| > 0$ имеют n ее собственных значений ($n > 2$).

Теорема 5. Следующая матрица

$$A = \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\lambda_1}{n-k+1} & \cdots & \dfrac{\lambda_1}{n-k+1} \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \qquad (2)$$

является неразложимой $n\times n$-матрицей индекса k ($2 \leq k \leq n$), спектр которой содержит k ненулевых собственных значений с максимальным модулем $\rho(A) = |\lambda_1| > 0$, а остальные $n - k$ ее собственных значений равны нулю. При $k = n$ матрица (2) превращается в матрицу (1).

Доказательство. При $k = n$ матрица (2) превращается в матрицу (1), которая по теореме 4 является неразложимой матрицей индекса n. Легко проверить, что ориентированный граф $\Gamma(A)$ матрицы (2) сильно связен, поэтому по теореме 1 матрица (2) неразложима.

Характеристический многочлен матрицы (2) записывается в виде

$$p_A(t) = t^{n-k}(t^k - \lambda_1^k),$$

откуда следует, что k собственных значений матрицы (2) являются ненулевыми и имеют максимальный модуль $\rho(A) = |\lambda_1| > 0$, а остальные $n - k$ ее собственных значений равны нулю. Теорема доказана.

Теорема 6. Следующая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \cdots & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} & \frac{\lambda_1}{2m-1} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_m & -\lambda_m \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_m & 0 & -\lambda_m \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

является неразложимой $n \times n$-матрицей индекса $k = 2$ с комплексными элементами, когда $n = 2m$. При этом $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m| > 0$.

Доказательство. Очевидно, что для $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $n = 4$. Предположим, что существует неразложимая 4×4-матрица A с комплексными элементами a_{ij} и с характеристическим многочленом

$$p_A(t) = t^4 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)t^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2, \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0.$$

При этом

$$E_1(A) = E_2(A) = 0, \;\; E_2(A) = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

$$E_4(A) = \det A = \lambda_1^2\lambda_2^2,$$

где $E_l(A)$ – сумма главных миноров порядка l матрицы A.

Ищем матрицу A в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} \\ \lambda_1 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ \lambda_1 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ \lambda_1 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

где $|\lambda_1| > 0$, $|a_{ij}| \geq 0$, $i,j = 2, 3, 4$, $i \neq j$. Тогда A будет неразложимой матрицей.

Сумма $E_2(A)$ записывается в следующей форме:

$$E_2(A) = -(\lambda_1^2 + a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43}).$$

Пусть $E_2(A) = -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, тогда получается следующее условие:

$$a_{23}a_{32} + a_{24}a_{42} + a_{34}a_{43} = \lambda_2^2. \tag{4}$$

Пусть $E_3(A) = 0$, тогда получается второе условие:

$$\frac{1}{3}\lambda_1^2(a_{23} + a_{32} + a_{24} + a_{42} + a_{34} + a_{43}) + {} + a_{24}a_{32}a_{43} + a_{23}a_{34}a_{42} = 0. \tag{5}$$

Условия (4) и (5) выполняются, если

$$a_{23} = a_{32} = \lambda_2, \;\; a_{24} = a_{34} = -\lambda_2, \;\; a_{42} = a_{43} = 0.$$

Тогда 4×4-матрица A будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Легко проверить, что матрица (6) удовлетворяет условию $\det A = \lambda_1^2\lambda_2^2$. Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$, то матрица (6) является неразложимой матрицей индекса $k = 2$.

Аналогично строится неразложимая 6×6-матрица A индекса $k = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{5} & \frac{\lambda_1}{5} & \frac{\lambda_1}{5} & \frac{\lambda_1}{5} & \frac{\lambda_1}{5} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$, и $2m \times 2m$-матрица (3). Теорема доказана.

<u>Замечание 1.</u> Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m| > 0$, то матрица (3) удовлетворяет теоремам 2 и 3.

<u>Замечание 2.</u> Аналогично матрице (3) строится неразложимая $n \times n$-матрица индекса k $(2 \leq k \leq n)$ с комплексными элементами, когда $n = km$. При этом $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_m| > 0$.

Библиографические ссылки

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen // Math. Z. – 1950. – 52. – S. 642–648.

2. *Minc H.* Nonnegative Matrices. – New York : Berlin Press, 1988. – 206 pp.

3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

4. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

Получено 15.10.2014