

Как мы видим, классический авторегрессионный метод может использоваться лишь при ярко выраженном тренде, однако на этапе принятия решения данная информация аналитику недоступна.

Конечно, финансовый аналитик при таких данных вряд ли ограничится использованием модели AR(1). Следует также отметить, что авторегрессионная модель первого порядка «запаздывает» за реальным курсом: график ее прогнозных значений практически совпадает с графиком фактических при его параллельном переносе вправо на 1-2 единицы (рис. 3). Подобный вывод напрашивается и при визуальном анализе графиков за «лето» и «осень».

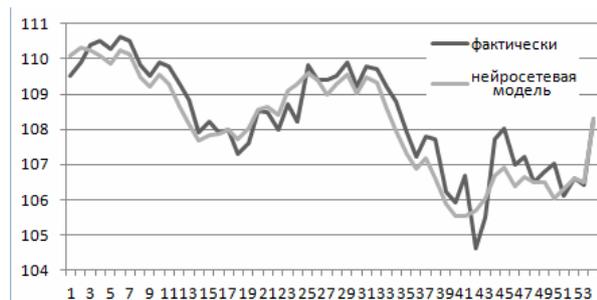


Рис. 3. Графики значений цены в период «весна»: фактическая, нейросетевая модель индикатора, авторегрессия AR(1)

Библиографические ссылки

1. Обзор – нефть Brent // Investing.com. – URL: <http://ru.investing.com/commodities/brent-oil> (дата обращения: 05.02.15).

2. Ионов Ч. Х., Шалыгина Л. В. Нефть как экономический ресурс России и мира // Инновационные направления развития в образовании, экономике, технике и технологиях: междунар. науч.-практ. конф.: сб. ст.: в 2 ч. / под общ. ред. В. Е. Жидкова. – 2014. – С. 62–66.

3. Королева А. Н., Максимова А. К. Классификация факторов, определяющих биржевую цену на нефть, и методов ее прогнозирования // Экономика, организация и управление предприятиями, отраслями, комплексами: теория и практика: сб. материалов междунар. науч. конф. – Киров, 2014. – С. 58–64.

Получено 30.03.2015

Тестирование нейросетевого индикатора тренда на исходных данных показало высокий результат (значительно превосходящий качество прогноза классической модели AR(1)), а также его независимость от глобальных тенденций в изменении цены. Предлагаемая модель в силу простоты реализации и возможности адаптивной настройки может с легкостью применяться как инструментальное средство, а созданные на ее основе программные системы повысят математическую обоснованность принятых решений в целях оптимизации управления инвестициями.

4. Твардовский В. В., Паршиков С. В. Секреты биржевой торговли. Торговля акциями на фондовых биржах. – М.: Альпина Паблишер, 2003. – 530 с.

5. Ботин В. А., Шумков Е. А. Статистический анализ технических индикаторов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. – 2010. – № 64. – С. 78–86.

6. Миндияров Н. И., Рейзенбук К. Э. Торговая система для анализа котировок акций и автоматической торговли на фондовом рынке // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – 2014. – № 1(101). – С. 139–144.

7. Крючков М. В., Русаков С. В. Математические модели систем поддержки принятия инвестиционных решений финансового трейдера // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. – 2014. – № 12(72). – 65 с.

УДК 521.19

Т. Г. Возмищева, кандидат физико-математических наук, доцент, ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

ТРАЕКТОРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДВУХ ЦЕНТРОВ В ПЛОСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО И НА СФЕРЕ: ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД (ЧАСТЬ 1)

Хорошо известно, что системы дифференциальных уравнений, описывающие реальные, совершенно различные явления в физике и механике, могут быть тесно связаны между собой. Основателем качественной теории дифференциальных уравнений является Пуанкаре. Пуанкаре, разра-

батывая качественные методы, исследовал задачи небесной механики и космологии, в которых особенно важно понять, как ведут себя траектории движений, то есть решения дифференциальных уравнений при бесконечном времени. В работах [1, 2, 3] построены бифуркационные множества на плоскости

интегралов движения и выполнена классификация областей возможности движения для задачи двух центров в пространствах постоянной кривизны: на сфере и в пространстве Лобачевского. В работе [4] представлен топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере.

Что мы можем сказать о пространстве трех измерений, в котором мы живем? Мы делаем вывод о том, что оно имеет постоянную нулевую кривизну, основываясь на опыте и наблюдениях об ограниченной части пространства, что в действительности неверно. Возможно, мы, как червь Клиффорда, приписываем изменения кривизны каким-либо физическим действиям либо изменениям в нашем организме. Малые участки пространства действительно аналогичны небольшим холмам на поверхности, которая в среднем является плоской, а именно там несправедливы обычные законы геометрии. Свойство искривленности или деформации непрерывно переходит с одного участка пространства на другой наподобие волны. Изменение кривизны пространства и есть то, что реально происходит в явлении, которое мы называем движением материи.

В данной работе исследуется связь интегрируемых задач небесной механики, задачи Кеплера и задачи двух центров в плоском пространстве, в пространстве Лобачевского и на сфере. Сделан предельный переход в задаче Кеплера и Эйлера на сфере и в пространстве Лобачевского при $\lambda \rightarrow 0$ (λ – кривизна соответствующего пространства). Доказано, что интегрируемые задачи, то есть задача Кеплера и задача двух центров, переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами. Выписаны потенциалы и метрики в пространствах постоянной кривизны в гномонических координатах.

Гномоническая проекция

Рассмотрим движение материальной частицы единичной массы p в поле силы с потенциалом V , зависящим от расстояния между частицей и фиксированным гравитационным центром P в 3-мерном пространстве постоянной кривизны. Мы рассматриваем его как сферу S^3 или верхнюю полу гиперболоида L^3 (в зависимости от знака кривизны) стандартно вложенную в R^4 , или пространство Минковского M^4 с координатами q_0, q_1, q_2, q_3 . Уравнение гиперболоида (сферы) имеет вид $q_0^2 - \mathbf{q}^2 = R^2$, $R^2 = 1/\lambda$ ($q_0^2 + \mathbf{q}^2 = R^2$). Здесь λ – кривизна, R – радиус кривизны. Рассматриваемая задача является аналогом классической задачи движения в центральном поле. Пусть θ – длина дуги гиперболы (меридиана), соединяющей точки p и P . Поместим центр в вершину гиперболоида или в северный полюс сферы. Тогда потенциал V – функция, зависящая только от угла θ . Уравнение Лапласа – Бельтрами имеет вид $\Delta = R^2 \text{sh}^{-2}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sh}^2\theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$. Реше-

нием этого уравнения для пространства Лобачевского является функция [5] $V_L = -\gamma\sqrt{\lambda} \text{cth} \theta + \text{const}$. Постоянная, очевидно, несущественна. Параметр γ играет роль гравитационной постоянной. При положительной кривизне для сферы в приведенных формулах нужно заменить функции, содержащие переменную θ на соответствующие тригонометрические функции $V_S = -\gamma\sqrt{\lambda} \text{ctg} \theta + \text{const}$. Для плоского евклидова пространства имеем ньютоновский потенциал $V_E = -\gamma/r + \text{const}$. Функция $V_{S,L}$ имеет сингулярную точку ньютоновского типа при $\theta = 0$. Для сферы потенциал является антисимметричным между двумя полусферами. Если γ положительна, то имеем притягивающую сингулярность $\theta = 0$ (северный полюс) и равную отталкивающую сингулярность в антиподальной точке $\theta = \pi$ (южный полюс). Эти две сингулярные точки можно трактовать как источник и сток.

Из формулы для потенциала V_S видно, что в притягивающих центрах этот потенциал имеет особенности типа $-1/r$, а в диаметрально противоположных им точках – особенности типа $1/r$. Пусть притягивающие центры расположены на сфере в точках с координатами $\mathbf{r}_1 = (\alpha, \beta, 0, 0)$ и $\mathbf{r}_2 = (-\alpha, \beta, 0, 0)$, $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha^2 + \beta^2 = R^2$, под действием ньютоновского притяжения которых движется материальная частица. В предыдущих работах автора доказана теорема, что материальная точка в задаче двух центров в пространствах S^3 и L^3 движется так же, как в двумерной системе. Не теряя общности, проведем вычисления для двумерной сферы и плоскости Лобачевского.

Пусть v_1 интегрируемая гамильтонова система на M_1^4 (соответственно, на Q_1^3), где M_1^4 кокасательное расслоение к сфере T^*S^2 с гамильтонианом $H_{S^2} = T + V$. Через $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ обозначим радиус-векторы (с началом в центре сферы) неподвижных притягивающих центров, через \mathbf{r} – радиус-вектор пробной частицы (рис. 1). Квадратичная по импульсам функция T определяется стандартной метрикой на сфере S^2 в R^3 , а функция V задана формулой $V_S = -\gamma_1\sqrt{\lambda} \text{ctg} \theta_1 - \gamma_2\sqrt{\lambda} \text{ctg} \theta_2$, где θ_i – угол между векторами \mathbf{r}_i и \mathbf{r} .

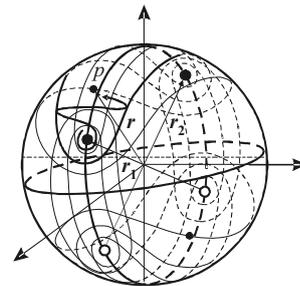


Рис. 1. Задача двух центров на сфере с траекториями

Рассмотрим верхнюю полу гиперboloида L^2 в трехмерном пространстве Минковского. Пусть v_2 интегрируемая гамильтонова система на M_2^4 (соответственно, на Q_2^3), где M_2^4 – кокасательное расслоение к псевдосфере T^*L^2 с гамильтонианом $H_{L^2} = T + V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной метрикой на псевдосфере L^2 в R_1^2 , а потенциальная энергия задается формулой $V_L = -\gamma_1 \sqrt{\lambda} \operatorname{cth} \theta_1 - \gamma_2 \sqrt{\lambda} \operatorname{cth} \theta_2$.

Рассмотрим задачу двух центров в евклидовом пространстве, то есть задачу о движении материальной точки в плоском пространстве в поле, создаваемом двумя неподвижными притягивающими центрами P_1 и P_2 соответственно (рис. 2). Пусть v_3 интегрируемая гамильтонова система на M_3^4 (соответственно, на Q_3^3), где M_3^4 – фазовое пространство в задаче двух неподвижных центров на плоскости R^2 с гамильтонианом $H_{R^2} = T + V$, где кинетическая энергия T определяется стандартной евклидовой метрикой на плоскости R^2 , а потенциал является ньютоновским, то есть потенциальная энергия задается формулой $V_E = -\gamma_1 / r_1 - \gamma_2 / r_2$. Здесь постоянные γ_1, γ_2 характеризуют силу притяжения между материальной частицей и гравитационными центрами P_1 и P_2 соответственно, r_1 и r_2 – расстояния от движущейся точки до центров.

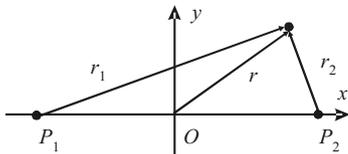


Рис. 2. Задача двух центров в евклидовом пространстве

Топология слоения Лиувилля содержит информацию о качественном поведении системы. Можно дать достаточно удобное и компактное описание этой топологии, рассматривая слоение лиувилля не во всем (4-мерном) фазовом пространстве, а на его 3-мерных подмногообразиях. Естественно, эти подмногообразия должны содержать каждый слой лиувиллева слоения целиком. Поэтому их можно представлять как прообразы некоторых кривых (на плоскости) на бифуркационной диаграмме при отображении момента $x \mapsto (H(x), F(x))$. В частности, в качестве этих кривых можно рассматривать прямые $h = \text{const}$. В этом случае говорят о лиувилевом слоении на (трехмерной) *изоэнергетической поверхности* $Q_h^3 = \{H(x) = h\}$.

Запишем уравнение соответствующего пространства в виде $q_0^2 \pm q_i q_i = 1 / \lambda$ (суммирование проводится по повторяющимся индексам). Пусть верхний знак относится к случаю пространства положительной кривизны, а нижний – к случаю пространства

отрицательной кривизны. Перейдем к гномоническим координатам. Гномонические координаты возникают в результате проекции на касательную плоскость из центра сферы (в этом случае мы имеем двузначное отображение, две точки отображаются в одну точку) или центра гиперboloида. Преимущество этой проекции над другими при анализе движения частицы вытекает из факта, что свободное движение частицы (равномерное движение на большом круге, гиперболе) проектируется в прямолинейное движение (не равномерное) по касательной плоскости. То есть спроектированные орбиты такие же, как в евклидовой геометрии: кривизна влияет только на скорость спроектированного движения. Имеем следующие соотношения между гномоническими координатами и координатами точки q_0, q_1, q_2 на сфере радиуса R (рис. 3):

$$r = R \operatorname{tg} \theta, \quad x_1 = R \operatorname{tg} \theta \cos \varphi, \quad x_2 = R \operatorname{tg} \theta \sin \varphi, \quad x_1^2 + x_2^2 = r^2,$$

$$q_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad q_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad q_0 = R \cos \theta.$$

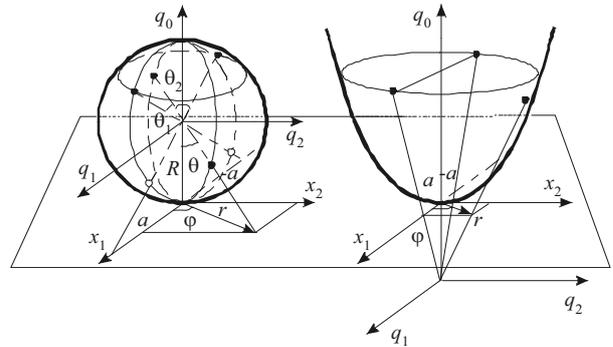


Рис. 3. Гномонические координаты

На плоскости Лобачевского заменим функции $\operatorname{tg} \theta, \sin \theta, \cos \theta$ на функции $\operatorname{th} \theta, \operatorname{sh} \theta, \operatorname{ch} \theta$. Здесь θ определяет длину гиперболы ('меридиана') в псевдоевклидовой метрике, идущей из полюса верхней полу гиперboloида к переменной точке, то есть псевдосферические координаты аналогичны сферическим координатам (для сферических координат θ – длина меридиана, большого круга, идущего из северного полюса сферы к переменной точке). Отсюда получим

$$x_1 = R \frac{q_1}{q_0}, \quad x_2 = R \frac{q_2}{q_0}, \quad q_0 = \pm \sqrt{R^2 \mp (q_1^2 + q_2^2)}$$

(здесь перед корнем знаки не относятся к положительной или отрицательной кривизне, если рассматривать только верхнюю полусферу, то $q_0 > 0$). Тогда имеем

$$x_i = \frac{R q_i}{\sqrt{R^2 \mp (q_1^2 + q_2^2)}} = \frac{q_i}{\sqrt{1 \mp \lambda (q_1^2 + q_2^2)}}.$$

Возведем в квадрат левые и правые части и сложим

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2}{1 \mp \lambda (q_1^2 + q_2^2)},$$

$$q_1^2 + q_2^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 \pm \lambda (x_1^2 + x_2^2)} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2}.$$

В результате получим

$$q_i = x_i \sqrt{1 \mp \lambda (q_1^2 + q_2^2)} = x_i \sqrt{1 \mp \frac{\lambda |\mathbf{x}|^2}{1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2}},$$

$$q_0 = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda} \mp (q_1^2 + q_2^2)} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda} \mp \frac{|\mathbf{x}|^2}{1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda (1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2)}}.$$

Верхний знак перед кривизной соответствует сфере, нижний – пространству Лобачевского.

Потенциал

Рассмотрим задачу Эйлера (двух центров) на сфере (на плоскости Лобачевского) в гномонических координатах, то есть рассмотрим потенциал пробной частицы в поле двух центров

$$V_S = -\gamma_1 \lambda^{1/2} \operatorname{ctg} \theta_1 - \gamma_2 \lambda^{1/2} \operatorname{ctg} \theta_2, \quad \operatorname{ctg} \theta_{1,2} = \frac{\pm \cos \theta_{1,2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_{1,2}}},$$

$$V_L = -\gamma_1 \lambda^{1/2} \operatorname{cth} \theta_1 - \gamma_2 \lambda^{1/2} \operatorname{cth} \theta_2, \quad \operatorname{cth} \theta_{1,2} = \frac{\pm \operatorname{ch} \theta_{1,2}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \theta_{1,2} - 1}}.$$

Теорема 1. Потенциал и метрика в интегрируемых задачах небесной механики – задаче Кеплера и задаче двух центров – переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами.

Доказательство. Разобьем доказательство на две части. Рассмотрим сначала потенциал рассматриваемых задач.

Поместим центры в точки с гномоническими координатами $(a, 0)$, $(-a, 0)$. Первоначально координаты центров $(\beta, \alpha, 0)$, $(\beta, -\alpha, 0)$, $((q_0, q_1, q_2))$

$$\cos \theta_{1,2} (\operatorname{ch} \theta_{1,2}) = \frac{(\mathbf{r}^{(1,2)} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{r}^{(1,2)}| \cdot |\mathbf{r}|},$$

где скалярное произведение понимается в смысле метрики пространства Евклида и пространства Минковского соответственно:

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1/\lambda + \alpha x_1}{\sqrt{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2} \sqrt{1 + \lambda a^2}} \right) =$$

$$= \frac{1 + \lambda \alpha x_1}{\sqrt{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2} \sqrt{1 + \lambda a^2}}.$$

Найдем теперь

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1} = \sqrt{1 - \frac{(1 + \lambda \alpha x_1)^2}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 + \lambda a^2)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 + \lambda a^2) - (1 + \lambda \alpha x_1)^2}}{\sqrt{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 + \lambda a^2)}}.$$

При этом

$$\mathbf{r} = \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{\lambda(1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2)}}; \frac{x_1}{\sqrt{\lambda(1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2)}}; \frac{x_2}{\sqrt{\lambda(1 \pm \lambda |\mathbf{x}|^2)}} \right),$$

$$\mathbf{r}^1 = \left(\sqrt{R^2 \mp \alpha^2}; \alpha; 0 \right) = \left(\sqrt{R^2 \mp \frac{a^2}{1 \pm \lambda a^2}}; \frac{a}{\sqrt{1 \pm \lambda a^2}}; 0 \right) =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{\lambda} \mp \frac{a^2}{1 \pm \lambda a^2}}; \frac{a}{\sqrt{1 \pm \lambda a^2}}; 0 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(1 \pm \lambda a^2)}}; \frac{a}{\sqrt{1 \pm \lambda a^2}}; 0 \right).$$

И далее

$$\operatorname{ctg} \theta_{1,2} = \frac{1 \pm \lambda \alpha x_1}{\sqrt{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 + \lambda a^2) - (1 + \lambda \alpha x_1)^2}}.$$

Для пространства Лобачевского, соответственно,

$$\operatorname{ch} \theta_1 = \frac{1 - \lambda \alpha x_1}{\sqrt{(1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 - \lambda a^2)}},$$

$$\operatorname{sh} \theta_1 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \theta_1 - 1} = \frac{\sqrt{(1 - \lambda \alpha x_1)^2 - (1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 - \lambda a^2)}}{\sqrt{(1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 - \lambda a^2)}},$$

$$\operatorname{cth} \theta_1 = \frac{1 - \lambda \alpha x_1}{\sqrt{(1 - \lambda \alpha x_1)^2 - (1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 - \lambda a^2)}},$$

$$\operatorname{cth} \theta_2 = \frac{1 + \lambda \alpha x_1}{\sqrt{(1 + \lambda \alpha x_1)^2 - (1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)(1 - \lambda a^2)}}.$$

Используя полученные формулы, можно выписать выражение для потенциальной энергии. Если $a = 0$, то мы должны получить задачу Кеплера (гравитационные центры смещаются в начало координат). Действительно, имеем

$$\operatorname{ctg} \theta_{1,2} \Big|_{a=0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Соответствующий потенциал примет кеплеровский вид $V_{S,L} = -\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2}} = -\frac{\gamma}{r}$.

Если $\lambda \rightarrow 0$, то есть радиус сферы (псевдосферы) $R \rightarrow \infty$, то имеем (рис. 4)

$$V_{S,L}|_{\lambda \rightarrow 0} = -\gamma_1 \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + a^2 - 2ax_1}} - \gamma_2 \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x}|^2 + a^2 + 2ax_1}} =$$

$$= -\frac{\gamma_1}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2}} - \frac{\gamma_2}{\sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2}} = -\frac{\gamma_1}{r_1} - \frac{\gamma_2}{r_2}.$$

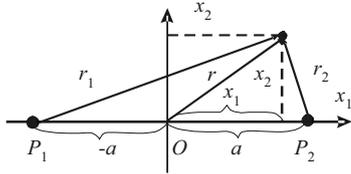


Рис. 4. Гномонические координаты для задачи двух центров на плоскости

Таким образом, также получили кеплеровский потенциал. Очевидно, результаты могут быть обобщены на любую размерность пространства Лобачевского L^n и сферы S^n , вложенных в соответствующие пространства $n+1$ размерности R_1^n и R^{n+1} .

Метрика

Выпишем метрику в касательном пространстве в гномонических координатах для сферы и пространства Лобачевского $ds^2 = dq_0^2 + dq_i dq_i$. Найдем индуцированную метрику на сфере в гномонических координатах, получим

$$dq_0 = \mp \sqrt{\lambda} \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^{3/2}},$$

$$dq_i = \frac{dx_i}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^{1/2}} - \frac{\lambda x_i^2 dx_i}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^{3/2}}.$$

Тогда

$$ds_S^2 = \lambda \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^3} + \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{1 + \lambda |\mathbf{x}|^2} + \lambda^2 \frac{x_i^4 dx_i^2}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^3} - 2\lambda \frac{(x_i^2 dx_i^2)}{(1 + \lambda |\mathbf{x}|^2)^2}.$$

Пусть $|\mathbf{x}|^2 = r^2$, в результате получим

$$ds_S^2 = \lambda \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^3} + \left(\frac{dx_1^2}{1 + \lambda r^2} + \frac{\lambda^2 x_1^2 (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^3} - \frac{2\lambda x_1 dx_1 (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})}{(1 + \lambda r^2)^2} + \frac{dx_2^2}{(1 + \lambda r^2)} + \frac{\lambda^2 x_2^2 (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^3} - \frac{2\lambda x_2 dx_2 (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})}{(1 + \lambda r^2)^2} \right) =$$

$$= \lambda \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^3} + \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{1 + \lambda r^2} + \frac{\lambda^2 r^2 (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^3} - \frac{2\lambda (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^2}.$$

Окончательно получим

$$ds_S^2 = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{1 + \lambda r^2} - \frac{\lambda (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 + \lambda r^2)^2}. \tag{1}$$

Выпишем теперь метрику в касательном пространстве в гномонических координатах для пространства Лобачевского. Ясно, что в формуле (1) нужно поменять знак перед кривизной на противоположный знак:

$$ds_L^2 = -dq_0^2 + dq_i dq_i = \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}{1 - \lambda |\mathbf{x}|^2} + \frac{\lambda (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1 - \lambda |\mathbf{x}|^2)^2}.$$

Легко проверить, что в пределе, когда $\lambda \rightarrow 0$, метрика на сфере и в пространстве Лобачевского принимает форму такую же форму, как и в плоском пространстве: $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$. Очевидно, что как и в случае потенциала, результаты могут быть обобщены на любую размерность. Теорема доказана.

Таким образом, потенциал и метрика в интегрируемых задачах небесной механики – задаче Кеплера и задаче двух центров – переходят друг в друга в пространствах постоянной кривизны при изменении двух параметров: кривизны пространства и расстояния между центрами. Кажется естественным, что интегрируемые задачи небесной механики должны переходить друг в друга при изменении кривизны пространства, именно этот факт говорит о единстве Вселенной.

Библиографические ссылки

1. *Vozmischeva T. G.* Classification of motions for generalization of the two center problem on a sphere // *Cel. Mech. and Dyn. Astr.* – 2000. – Vol. 77. – Pp. 37–48.
2. *Vozmischeva T. G.* The Lagrange and two-center problems in the Lobachevsky space // *Cel. Mech. and Dyn. Astr.* – 2002. – Vol. 84(1). – Pp. 65–85.
3. *Возмищева Т. Г.* Классификация движений для обобщения задачи Эйлера на сферу // *Математический сборник.* – Изд-во Удм. ун-та, 1998. – С. 34–40.
4. *Возмищева Т. Г., Ошемков А. А.* Топологический анализ задачи двух центров на двумерной сфере // *Математический сборник.* – 2002. – Т. 193. – № 8. – С. 3–38.
5. *Возмищева Т. Г.* Проблема регуляризации в задачах небесной механики в пространствах постоянной кривизны. Алгебра Ли первых интегралов // *Вестник ИжГТУ.* – 2008. – № 4. – С. 198–202.