В качестве начального приближения для скоростей частиц берутся скорости газа. Параметры частиц принимаются такими же, как на поверхности вдува. Далее в зависимости от характера течения имеются два варианта алгоритма решения данной задачи.

1-й вариант. В рассматриваемой области нет зон с возвратным (циркуляционным) течением. В этом случае реализуется маршевый по продольной координате алгоритм. Итерации по точкам проводятся по поперечной координате. В качестве $B_{si,j}, C_{si,j}$ сначала берутся значения B_{s0}, C_{s0}. Затем проводятся итерации по уточнению положения точки 0 на диагонали каждой ячейки и решаются уравнения (6), (10) для числа частиц $N_{si,j}$. После этого решаются уравнения (8) по схеме (9) в каждой точке i, j и уточняются значения $B_{si,j}, C_{si,j}$. В этом варианте в памяти ЭВМ хранятся параметры частиц на слое *i* и на слое (*i* – 1).

2-й вариант. В расчетной области имеются зоны с возвратным течением. В этом случае итерации по точкам проводятся во всей расчетной области. Требования к памяти ЭВМ в этом варианте значительно выше, чем в первом варианте. Для достижения невязки по уравнению неразрывности $\sim 10^{-4}$ требуется всего около 15 глобальных итераций.

Изложенный численный метод позволяет рассчитывать поля скоростей газовой и дисперсной фаз, траектории движения частиц (из решения уравнений $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{V_l}{U_l}$ при найденных U_l, V_l), массовый поток осаждающихся на стенки частиц, эволюцию спектра размеров частиц.

Библиографические ссылки

1. Газовая динамика двухфазных течений в соплах / И. М. Васенин, В. А. Архипов, В. Г. Бутов [и др.]. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 1986. – 264 с.
2. Там же.
3. *Горохов М. М.*, *Корепанов А. В.*, *Тененев В. А.* Математические модели многомерных многофазных реагирующих течений // Вестник ИжГТУ. – 2014. – № 3(63). – С. 176–180.
4. Газовая динамика двухфазных течений в соплах / И. М. Васенин, В. А. Архипов, В. Г. Бутов [и др.]. – 1986. – 264 с.
5. Там же.
6. *Ковеня В. М.*, *Тарнавский Г. А.*, *Черный С. Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. – Новосибирск : Наука, 1990. – 248 с.

Получено 10.10.2014

УДК 517.937

С. П. Зубова, доктор физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет
В. И. Усков, аспирант, Воронежский государственный университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ДВУХШАГОВОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Задача Коши для дескрипторного уравнения (дифференциального уравнения с необратимым оператором при производной) решалась многими авторами. Значительные результаты получены С. Г. Крейном, Г. А. Свиридюком, В. Е. Фёдоровым, А. Г. Баскаковым, К. И. Чернышовым, В. Ф. Чистяковым, А. А. Щегловой, Н. А. Сидоровым и их учениками.

В работах С. П. Зубовой [1, 2] решена задача Коши с фредгольмовским и нётеровым операторами при производной методом каскадного расщепления исходного уравнения на уравнения в подпространствах с применением на каждом этапе процедуры дифференцирования, что требовало определенной гладкости коэффициентов уравнения.

В работе [3] рассматривался частный случай одного этапа декомпозиции, производимого способом, несколько отличным от способа, применяемого в [4, 5]. При предложенной в [6] декомпозиции снижаются требования на гладкость коэффициентов уравнения.

В настоящей работе рассматривается случай двух этапов каскадной декомпозиции дескрипторного дифференциального уравнения методом, предложенным в [7].

Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения

Рассматривается уравнение

$$A\frac{du(t)}{dt} = B(t)u(t) + F(t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(0) = u^0 \in E_1, \tag{2}$$

где $A, B(t): E_1 \to E_2$ – линейные замкнутые операторы, E_1, E_2 – банаховы пространства, $\overline{\operatorname{dom} A} = E_1$, $\operatorname{dom} B(t) = \operatorname{dom} A$, $F(t)$ – заданная вектор-функция со значениями в E_2, $0 \le t \le T$; A – фредгольмовский оператор.

Рассматриваются вопросы существования и единственности решения задачи (1), (2), а также построение решения.

Под решением задачи (1), (2) подразумевается дифференцируемая на $[0;T]$ функция $u(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) при всех $t\in[0;T]$ и условию (2).

Для решения поставленной задачи используются следующие свойства фредгольмовского оператора. Имеют место разложения в прямые суммы:

$$E_1=\mathrm{Coim}\,A\oplus\mathrm{Ker}\,A,\quad E_2=\mathrm{Im}\,A\oplus\mathrm{Coker}\,A, \tag{3}$$

где $\mathrm{Coker}\,A$ – дефектное подпространство, $\mathrm{Coim}\,A$ – прямое дополнение к ядру $\mathrm{Ker}\,A$ в E_1, $\dim\mathrm{Ker}\,A=\dim\mathrm{Coker}\,A<\infty$. Сужение $\tilde{A}$ оператора A на подпространство $\mathrm{Coim}\,A\cap\mathrm{dom}\,A$ имеет ограниченный обратный $\tilde{A}^{-1}$.

Вводятся проекторы P_0 и Q_0 на $\mathrm{Ker}\,A$ и $\mathrm{Coker}\,A$ соответственно, отвечающие разложениям (3), и оператор $A^-=\tilde{A}^{-1}(I-Q_0)$, называемый *полуобратным*, $A^-:\ \mathrm{Im}\,A\to\mathrm{Coim}\,A\cap\mathrm{dom}\,A$ [8].

<u>Шаг 1.</u> Произведем декомпозицию уравнения (1). В силу фредгольмовости оператора A функция $u(t)$ раскладывается на элементы в подпространствах:

$$u(t)=P_0u(t)+(I-P_0)u(t), \tag{4}$$

и уравнение (1) записывается как уравнение

$$A\frac{d(I-P_0)u(t)}{dt}=B(t)(I-P_0)u(t)+B(t)P_0u(t)+F(t). \tag{5}$$

Далее к уравнениям вида

$$Av=w,\ \ w\in E_2 \tag{6}$$

применяем следующий результат [9–12]:

уравнение (6) *эквивалентно системе*

$$\begin{cases}(I-P_0)v=A^-w,\\ Q_0w=0.\end{cases}$$

При этом P_0v *остается произвольным элементом ядра* $\mathrm{Ker}\,A.$

Поэтому уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{d(I-P_0)u(t)}{dt}=\\ =A^-B(t)(I-P_0)u(t)+A^-B(t)P_0u(t)+A^-F(t),\\ Q_0B(t)(I-P_0)u(t)+Q_0B(t)P_0u(t)+Q_0F(t)=0.\end{cases} \tag{7}$$

Дальнейшая цель: выразить с помощью второго соотношения в (7) элемент $P_0u(t)$ через $(I-P_0)u(t),$ затем решить первое уравнение в (7) относительно $(I-P_0)u(t),$ далее определить $u(t)$ из равенства (4).

Рассмотрим второе уравнение в системе (7):

$$(Q_0B(t)P_0)P_0u(t)=-Q_0B(t)(I-P_0)u(t)-Q_0F(t) \tag{8}$$

(так как $P_0^2=P_0$).

Пусть оператор $A_1(t)=Q_0B(t)P_0:\mathrm{Ker}\,A\to\mathrm{Coker}\,A$ необратим в $\mathrm{Ker}\,A.$ Тогда он является фредгольмовским при каждом $t\in[0;T]$ как конечномерный оператор, следовательно, справедливы разложения:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,A&=\mathrm{Coim}\,A_1(t)\oplus\mathrm{Ker}\,A_1(t),\\ \mathrm{Coker}\,A&=\mathrm{Im}\,A_1(t)\oplus\mathrm{Coker}\,A_1(t).\end{aligned} \tag{9}$$

Сужение $\tilde{A}_1(t)$ оператора $A_1(t)$ на подпространство $\mathrm{Coim}\,A_1(t)\cap\mathrm{dom}\,A_1(t)$ имеет ограниченный при каждом $t\in[0;T]$ обратный оператор $\tilde{A}_1^{-1}(t).$

Введем проекторы $P_1(t)$ и $Q_1(t)$ на $\mathrm{Ker}\,A_1(t)$ и $\mathrm{Coker}\,A_1(t)$ соответственно, отвечающие разложениям (9), и оператор $A_1^-(t)=\tilde{A}_1^{-1}(t)(I-Q_1(t)),$ $A_1^-(t):\mathrm{Im}\,A_1(t)\to\mathrm{Coim}\,A_1(t)\cap\mathrm{dom}\,A_1(t).$

<u>Шаг 2.</u> Произведем декомпозицию уравнения (8). Оно равносильно, как уравнение вида (6), системе

$$\begin{cases}P_0u(t)=-A_1^-(t)Q_0B(t)(I-P_0)u(t)-\\ -A_1^-(t)Q_0F(t)+P_1(t)u(t),\\ Q_1(t)Q_0B(t)(I-P_0)u(t)+Q_1(t)Q_0F(t)=0.\end{cases} \tag{10}$$

Теперь задача: выразить с помощью второго соотношения в (10) элемент $P_1(t)u(t)$ через $(I-P_0)u(t),$ определить $P_0u(t),$ затем решить первое уравнение в (7) относительно $(I-P_0)u(t),$ далее определить $u(t)$ из равенства (4).

Пусть $Q_1(t)Q_0B(t)(I-P_0)$ – сильно непрерывно дифференцируемый оператор, а $Q_1(t)Q_0F(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Дифференцируем второе равенство последней системы по t. Имеем:

$$\begin{aligned}&\frac{dQ_1(t)Q_0B(t)}{dt}(I-P_0)u(t)+\\ &+Q_1(t)Q_0B(t)\frac{d(I-P_0)u(t)}{dt}+\frac{dQ_1(t)Q_0F(t)}{dt}=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Подставив первое равенство системы (10) в правую часть первого равенства системы (7) и полученное таким образом равенство – в равенство (11), получим уравнение

$$A_2(t)(P_1(t)u(t))=-S(t)(I-P_0)u(t)-K(t)F(t), \tag{12}$$

где

$$A_2(t)=Q_1(t)Q_0B(t)A^-B(t)P_1(t);$$

$$S(t) = \left(\frac{dQ_1(t)Q_0B(t)}{dt} + \right.$$
$$\left. +Q_1(t)Q_0B(t)A^-B(t)\left[I - A_1^-(t)Q_0B(t) \right] \right) \left(I - P_0 \right);$$

$$K(t)F(t) = \frac{dQ_1(t)Q_0F(t)}{dt} + Q_1(t)Q_0B(t)\times$$
$$\times \left(A^-F(t) - A^-B(t)A_1^-(t)Q_0F(t) \right).$$

Пусть оператор $A_2(t) : \mathrm{Ker}\, A_1(t) \to \mathrm{Coker}\, A_1(t)$ обратим при каждом $t \in [0;T]$. Из уравнения (12) имеем:

$$P_1(t)u(t) = -A_2^{-1}(t)S(t)\left(I - P_0 \right)u(t) - A_2^{-1}(t)K(t)F(t). \quad (13)$$

Подставив выражение (13) в первое равенство системы (10), а полученное таким образом выражение для функции $P_0u(t)$ – в первое уравнение системы (7), получим уравнение для нахождения функции $\left(I - P_0 \right)u(t)$:

$$\frac{d\left(I - P_0 \right)u(t)}{dt} = T(t)\left(I - P_0 \right)u(t) + T_F(t) \quad (14)$$

в обозначениях:

$$T(t) = A^-B(t)\hat{S}(t)\left(I - P_0 \right);$$

$$T_F(t) = A^-B(t)\hat{F}(t) + A^-F(t),$$

где $\hat{S}(t) = \left(I - A_1^-(t)Q_0B(t) - A_2^{-1}(t)S(t) \right)\left(I - P_0 \right);$

$$\hat{F}(t) = -\left(A_1^-(t)Q_0F(t) + A_2^{-1}(t)K(t)F(t) \right).$$

Из условия (2) получаем условие для $\left(I - P_0 \right)u(t)$:

$$\left(I - P_0 \right)u(0) = \left(I - P_0 \right)u^0. \quad (15)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть оператор $T(t)\left(I - P_0 \right)$ – ограниченный и сильно непрерывный по $t \in [0;T]$ и функция $T_F(t)$ непрерывна на $[0;T]$. Существует решение задачи (1), (2) в том и только в том случае, когда выполняются условия*

$$Q_0B(t)u(t) + Q_0F(t) \equiv 0,$$
$$Q_1(t)Q_0B(t)\left(I - P_0 \right)u(t) + Q_1(t)Q_0F(t) \equiv 0, \quad (16)$$
$$0 \le t \le T.$$

При выполнении этих условий решение $u(t)$ единственно и имеет вид

$$u(t) =$$
$$= \hat{S}(t)\left(V_T(t,0)\left(I - P_0 \right)u^0 + \int_0^t V_T(t,\tau)T_F(\tau)d\tau \right) + \hat{F}(t), \quad (17)$$

где $V_T(t,\tau)$ – эволюционный оператор, производящим оператором которого является оператор $T(t)\left(I - P_0 \right) \in L\left(\mathrm{Coim}\, A \right)$.

Справедливость теоремы следует из равенств (4), (8), (13), уравнения (14), условия (15) и применения к решению задачи (14), (15) результатов из [13].

Условия (16) с $t = 0$

$$\begin{gathered} Q_0B(0)u^0 + Q_0F(0) = 0, \\ Q_1(0)Q_0B(0)\left(I - P_0 \right)u^0 + Q_1(0)Q_0F(0) = 0 \end{gathered} \quad (18)$$

называют условиями согласования.

Следствие. *Решение задачи (1), (2) существует только при выполнении условий согласования.*

ЗАМЕЧАНИЕ. *Если оператор A_i нулевой ($i = 1,2$), то $P(A_i) = I$, $Q(A_i) = I$, $A_i^- = 0$, и процесс расщепления пространств продолжается дальше.*

Получено 13.10.2014

Библиографические ссылки

1. *Зубова С. П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной // Доклады РАН. – 2009. – Т. 428, № 4. – С. 444–446.
2. *Зубова С. П.* Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной // Воронежский гос. ун-т. – Воронеж, 1991. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 17.06.91, № 2516-В91.
3. *Баев А. Д.*, *Зубова С. П.*, *Усков В. И.* Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия «Физика, математика». – 2013. – № 2. – С. 134–140.
4. *Зубова С. П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной.
5. *Зубова С. П.* Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной.
6. *Баев А. Д.*, *Зубова С. П.*, *Усков В. И.* Указ. соч.
7. Там же.
8. *Вайнберг М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М. : Наука, 1969.
9. *Зубова С. П.* Решение однородной задачи Коши для уравнения с нётеровым оператором при производной.
10. *Зубова С. П.* Свойства возмущенного фредгольмовского оператора. Решение дифференциального уравнения с фредгольмовским оператором при производной.
11. *Баев А. Д.*, *Зубова С. П.*, *Усков В. И.* Указ. соч.
12. *Вайнберг М. М.* Указ. соч.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М. : Наука, 1967.