УДК 512.643.5

М. Я. Михлин, аспирант, Череповецкий государственный университет

КРАТНОСТЬ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПРИМИТИВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ

Пусть $A \in M_n$ – неотрицательная неразложимая импримитивная матрица, а k – индекс импримитивности. При $k > 1$ такая матрица должна иметь специальную форму, которую перестановкой рядов можно привести к следующему цикличскому виду, где вдоль диагонали стоят квадратные блоки [1]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Спектр матрицы – это совокупность всех характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ матрицы $A \in M_n$, рассматриваемая как система точек в комплексной λ-плоскости, которая переходит сама в себя при повороте этой плоскости на угол $2\pi/k$ [2].

Импримитивная неразложимая неотрицательная матрица $A \in M_n$ имеет k собственных характеристических чисел $\lambda_0 = \rho(A)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$, модули которых равны спектральному радиусу $\rho(A)$, являются корнями уравнения $\lambda^k - \rho^k(A) = 0$ и располагаются весьма регулярным образом [3].

Всякое ненулевое собственное значение матрицы $A \in M_n$, модуль которого меньше спектрального радиуса, лежит на окружности с центром в 0, проходящей через ik ($i \in N$) собственных значений матрицы A, которые образуют на ней равномерную сетку [4].

Если λ – произвольное собственное значение матрицы $A \in M_n$, то $e^{2\pi i p/k}\lambda$ тоже будет ее собственным значением для всех $p = 0, 1, 2, \dots, k-1$ ([5], следствие 8.4.6., стр. 601).

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Характеристический многочлен матрицы $P_A(t) = -1 + t^8 - 4t^4 - 4t^2$. Индекс импримитивности $k = 2$. На рис. 1 изображен спектр матрицы (2).

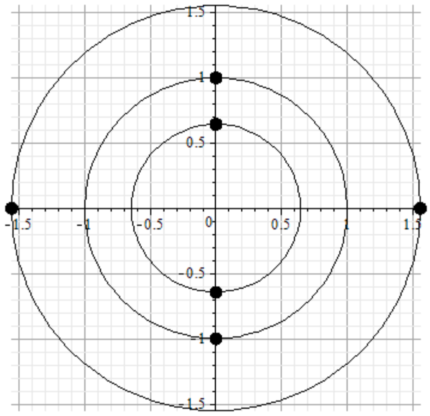

Рис. 1. Спектр матрицы (2)

Данная матрица должна иметь $n = 8$ собственных значений, но на спектре матрицы визуализируются только шесть. Это вызвано тем, что два собственных значения на средней окружности имеют кратность 2: $\lambda_1 = (1{,}55;\ 0)$, $\lambda_2 = (1{,}55;\ \pi)$, $\lambda_3 = (1;\ \pi/2)$, $\lambda_4 = (1;\ -\pi/2)$, $\lambda_5 = (1;\ \pi/2)$, $\lambda_6 = (1;\ -\pi/2)$, $\lambda_7 = (0{,}64;\ \pi/2)$, $\lambda_8 = (0{,}64;\ -\pi/2)$.

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Характеристический многочлен матрицы $P_A(t) = 2 + t^{12} - t^9 - 3t^6 + t^3$. Индекс импримитивности $k = 3$. На рис. 2 изображен спектр матрицы (3).

Данная матрица должна иметь $n = 12$ собственных значений, но на спектре матрицы визуализируются только девять. На окружности максимального радиуса располагаются три ($k = 3$) собственных числа, модули которых максимальны и равны спектральному радиусу: $\lambda_1 = (1{,}26;\ 0)$, $\lambda_2 = (1{,}26;\ 2\pi/3)$, $\lambda_3 = (1{,}26;\ -2\pi/3)$. Остальные девять собственных значений находятся на другой окружности, три из которых имеют кратность 2: $\lambda_4 = (1;\, 0)$, $\lambda_5 = (1;\, 2\pi/3)$, $\lambda_6 = (1;\, -2\pi/3)$, $\lambda_7 = (1;\, \pi)$, $\lambda_8 = (1;\, \pi/3)$, $\lambda_9 = (1;\, -\pi/3)$, $\lambda_{10} = (1;\, \pi)$, $\lambda_{11} = (1;\, \pi/3)$, $\lambda_{12} = (1;\, -\pi/3)$.

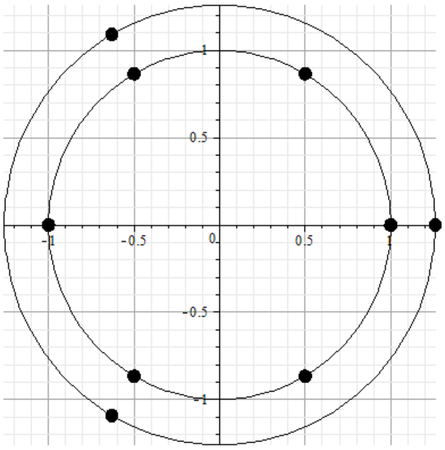

Рис. 2. Спектр матрицы (3)

Таким образом, произвольное собственное значение матрицы $A \in M_n$, модуль которого меньше спектрального радиуса, может быть кратным.

Получено 20.10.2014

Следовательно, следствие, приведенное в [6], сформулируем следующим образом. Пусть $A \in M_n$, и предположим, что матрица A неотрицательна и неразложима и множество $S = \{\lambda_n = \rho(A), \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{n-k+1}\}$ собственных значений с максимальным модулем $\rho(A)$ содержит в точности k различных элементов. Тогда кратность любого собственного значения $\lambda_i \in S$ равна 1 и $S = \{e^{2\pi ip/k}\rho(A){:}p = 0,1, \ldots, k-1\}$, т. е. максимальные по модулю собственные значения – это не что иное, как k корней из единицы степени k. Более того, если λ – произвольное собственное значение матрицы A, то $e^{2\pi ip/k}\lambda$ тоже будет ее собственным значением для всех $p = 0,1, \ldots, k-1$, кроме того, такое собственное значение может быть кратным.

Библиографические ссылки

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1968. – 576 с.

2. Там же.

3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств : пер. с англ. – М. : Наука, 1972. – 232 с.

4. *Михлин М. Я.* Расположение собственных значений импримитивных неотрицательных неразложимых матриц // Вестник ИжГТУ. – 2014. – № 1(61).– С. 133–135.

5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ : пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – С. 601.

УДК 519.712:510.25

Н. И. Калядин, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДИКАТОВ РАДЕМАХЕРА ПРИ СИНТЕЗЕ РАСПОЗНАЮЩИХ АВТОМАТОВ

Математическое моделирование решающих правил (предикатов) распознавания образов в различных областях науки и практики (химия, физика, геология, медицина, инженерия и т. д.) является необходимым этапом при разработке компьютерных технологий синтеза распознающих автоматов (классификаторов, идентификаторов) [1, 2].

Результатом моделирования является ответ на вопрос о функциональной полноте и независимости выбранных решающих правил (предикатов), а также оценке их вычислительной сложности при автоматной реализуемости.

Полнота в дискретной математике определяется по-разному, например, известна теорема о функциональной полноте для систем булевых функций (критерий Поста – Яблонского) [3].

В данной работе рассматривается конечная модель $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$ с основным множеством $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и полной сигнатурой σ, которая понимается следующим образом.

Пусть $\sum(M)$ – произвольное семейство предикатов на M.

Определение 1. *Сигнатуру* $\sigma = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$ *модели* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$ *назовем полной относительно системы предикатов* $\sum(M)$, *если любой предикат этой системы можно получить из предикатов сигнатуры* σ *с помощью логических связок* &, ∨, ¬.

Представимость конечных объектов при синтезе автоматов

Синтез **быстродействующих** (**однотактных,** или **симультанных**) автоматов по распознаванию (классификации) конечных объектов большой размерности предполагает использование известных неаналитических базисов (Адамара, Крестенсона, Уолша, Чебышева – Маркова и т. д.).

Дискретные функции Уолша, определенные в точках $m \in N \setminus \{0\}$, где $N = \{0,1,2,\ldots\}$ − множество