значений находятся на другой окружности, три из которых имеют кратность 2: $\lambda_4 = (1;\ 0)$, $\lambda_5 = (1;\ 2\pi/3)$, $\lambda_6 = (1;\ -2\pi/3)$, $\lambda_7 = (1;\ \pi)$, $\lambda_8 = (1;\ \pi/3)$, $\lambda_9 = (1;\ -\pi/3)$, $\lambda_{10} = (1;\ \pi)$, $\lambda_{11} = (1;\ \pi/3)$, $\lambda_{12} = (1;\ -\pi/3)$.

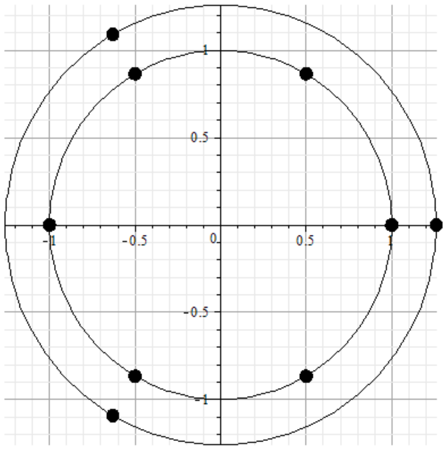

Рис. 2. Спектр матрицы (3)

Таким образом, произвольное собственное значение матрицы $A \in M_n$, модуль которого меньше спектрального радиуса, может быть кратным.

Следовательно, следствие, приведенное в [6], сформулируем следующим образом. Пусть $A \in M_n$, и предположим, что матрица A неотрицательна и неразложима и множество $S = \{\lambda_n = \rho(A), \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{n-k+1}\}$ собственных значений с максимальным модулем $\rho(A)$ содержит в точности k различных элементов. Тогда кратность любого собственного значения $\lambda_i \in S$ равна 1 и $S = \{e^{2\pi ip/k}\rho(A): p = 0, 1, \ldots, k-1\}$, т. е. максимальные по модулю собственные значения – это не что иное, как k корней из единицы степени k. Более того, если λ – произвольное собственное значение матрицы A, то $e^{2\pi ip/k}\lambda$ тоже будет ее собственным значением для всех $p = 0, 1, \ldots, k-1$, кроме того, такое собственное значение может быть кратным.

Получено 20.10.2014

Библиографические ссылки

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1968. – 576 с.
2. Там же.
3. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств : пер. с англ. – М. : Наука, 1972. – 232 с.
4. *Михлин М. Я.* Расположение собственных значений импримитивных неотрицательных неразложимых матриц // Вестник ИжГТУ. – 2014. – № 1(61).– С. 133–135.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ : пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – С. 601.

УДК 519.712:510.25

Н. И. Калядин, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДИКАТОВ РАДЕМАХЕРА ПРИ СИНТЕЗЕ РАСПОЗНАЮЩИХ АВТОМАТОВ

Математическое моделирование решающих правил (предикатов) распознавания образов в различных областях науки и практики (химия, физика, геология, медицина, инженерия и т. д.) является необходимым этапом при разработке компьютерных технологий синтеза распознающих автоматов (классификаторов, идентификаторов) [1, 2].

Результатом моделирования является ответ на вопрос о функциональной полноте и независимости выбранных решающих правил (предикатов), а также оценке их вычислительной сложности при автоматной реализуемости.

Полнота в дискретной математике определяется по-разному, например, известна теорема о функциональной полноте для систем булевых функций (критерий Поста – Яблонского) [3].

В данной работе рассматривается конечная модель $\mathfrak{M} = (M, \sigma)$ с основным множеством $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и полной сигнатурой σ, которая понимается следующим образом.

Пусть $\sum(M)$ – произвольное семейство предикатов на M.

О п р е д е л е н и е 1. *Сигнатуру* $\sigma = \langle P_1, \ldots, P_n \rangle$ *модели* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$ *назовем полной относительно системы предикатов* $\sum(M)$, *если любой предикат этой системы можно получить из предикатов сигнатуры* σ *с помощью логических связок* &, $\vee$, $\neg$.

Представимость конечных объектов при синтезе автоматов

Синтез **быстродействующих** (**однотактных,** или **симультанных**) автоматов по распознаванию (классификации) конечных объектов большой размерности предполагает использование известных неаналитических базисов (Адамара, Крестенсона, Уолша, Чебышева – Маркова и т. д.).

Дискретные функции Уолша, определенные в точках $m \in N \setminus \{0\}$, где $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ − множество всех натуральных чисел, образуются равномерной выборкой непрерывных функций Уолша:

$$\omega_i^m = \omega_i\left(\frac{t}{\mathfrak{T}_0}\right)\delta\left(t-k\cdot\tau_m\right), \qquad (1)$$

где $\mathfrak{T}_0 = m\cdot\tau_m$ – временная база; τ_m – интервал дискретизации во временной области; $\delta\left(t-k\cdot\tau_m\right)$ – дельта-функция.

Дискретные диадно-упорядоченные функции Уолша (Пэли) с числом отсчетов $m=2^n$, $n\in N$, можно генерировать с помощью рекуррентных соотношений:

$$\omega_0^{2^n}=1,\ \omega_{2^{n-1}}^{2^n}\left(k\right)=\left(-1\right)^{k_0},$$

$$\omega_i^{2^n}\left(k\right)=\begin{cases}\omega_i^{2^{n-1}}\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right), & \left(i=\overline{0,2^{n-1}-1}\right),\\ \omega_i^{2^{n-1}}\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right)\cdot\omega_{2^{n-1}}^{2^n}\left(k\right), & \end{cases} \qquad (2)$$

где $\left[\frac{k}{2}\right]$ – целая часть числа $\frac{k}{2}$,

$k=\sum_{p=0}^{n-1}2^p k_p,\ k_p\in\{0,1\}\ \left(n=1,2,...;\ k=\overline{0,2^n-1}\right).$

Приведем необходимые, ранее полученные утверждения [4, с. 61].

Лемма 1*. Значение дискретной функции Уолша $\omega_i^{2^n}\left(k\right)$ в точке $k\in\left\{0,1,...,2^n-1\right\}$ совпадает со значением непрерывной функции Уолша $\omega_i\left(\frac{t}{\mathfrak{T}_0}\right)$, взятым на интервале $t=\left[k\cdot\tau_{2^n},\left(k+1\right)\cdot\tau_{2^n}\right]$.*

Теорема 1. *Пусть $r=\left[\nu\cdot k\right]$ – целая часть числа $\nu\cdot k$, где $\nu=2^n/m$, $m\in\left\{2^{n-1}+1,...,2^n\right\}$. Тогда дискретные функции Уолша $\omega_i^m\left(k\right)$, определенные в m точках, можно представить в виде*

$$\omega_i^m\left(k\right)=(-1)^{\sum_{p=0}^{n-1}i_{n-p-1}\cdot r_p}, \qquad (3)$$

где $k=0,1,...,m-1;\ \ i=0,1,...,2^n-1;$

$r=\sum_{p=0}^{n-1}2^p r_p,\ r_p\in\{0,1\}.$

Особый интерес для прикладных задач представляют дискретные функции Радемахера, отличающиеся простотой аппаратно-программного моделирования и составляющие подкласс дискретных функций Уолша.

Дискретные функции Радемахера, определенные в $m=2^n$ точках, вычисляются следующим образом:

$$r^{2^n}\left(0,k\right)=1;k=\overline{0,2^n-1};$$

$$r^{2^n}\left(1,k\right)=\begin{cases}+1, & k=\overline{0,2^{n-1}-1},\\ -1, & k=\overline{2^{n-1},2^n-1}.\end{cases} \qquad (4)$$

Остальные функции вычисляются с помощью итерационного соотношения:

$$r^{2^n}\left(i,k\right)=r^{2^n}\left(i-1,2k \bmod 2^n\right);\ i=\overline{2,n}. \qquad (5)$$

Точечные предикаты и предикаты Радемахера

На множестве $M=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ различаем **точечные предикаты:**

$$P_i\left(x\right)=\begin{cases}u, \text{ если } x=a_i,\ i=\overline{1,m};\ u \text{ – «истина»},\\ л \text{ в противном случае; } л \text{ – «ложь»}\end{cases} \qquad (6)$$

и **предикаты Радемахера**

$$R_i\left(x\right)=\begin{cases}u, \text{ если } \left(x=a_k\right)\&\left(r^m\left(i,k-1\right)\right)=1,\\ л \text{ в противном случае,}\end{cases} \qquad (7)$$

здесь $i=\overline{1,n};\ k\in\{1,2,...,m\};$

$$n=\begin{cases}l, \text{ если } m=2^l,\\ \left[\log_2 m\right]+1 \text{ в противном случае,}\\ \text{где } [\bullet] - \text{ целая часть.}\end{cases}$$

На связь точечных предикатов и предикатов Радемахера указывает следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого $k\in\mathfrak{I}_m=\{1,2,...,m\}$, $m\in N$, точечные предикаты $P_k\left(x\right)$ представимы через предикаты Радемахера $\tilde{R}_i^k\left(x\right)$:*

$$P_k\left(x\right)=\tilde{R}_1^k\left(x\right)\&\tilde{R}_2^k\left(x\right)\&...\&\tilde{R}_n^k\left(x\right), \qquad (8)$$

где $\tilde{R}_i^k=\begin{cases}R_i\left(x\right), \text{ если } \left[\nu\cdot(\text{k-1})\right]_{n-i+1}=0,\ \nu=2^n/m,\\ \neg R_i\left(x\right) \text{ в противном случае,}\\ \text{где } [\bullet] - \text{ целая часть,}\end{cases}$

$\left[\nu\cdot\left(k-1\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}2^{i-1}\left[\nu\cdot\left(k-1\right)\right]_i;$

$\left[\nu\cdot\left(k-1\right)\right]_i\in\{0,1\};\ n=\mu y\ \left(2^y\geq m\right),$

μ – оператор минимизации, $i=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m}..$

Относительная полнота и независимость сигнатур предикатов Радемахера в конечных моделях

Предваряя синтез распознающих (классифицирующих) автоматов, рассмотрим полноту и независимость сигнатур предикатов Радемахера в конечных моделях.

Пусть $M = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ – множество конструктивных объектов.

Определение 2. *Сигнатура* $\sigma = \langle P_1, ..., P_n \rangle$ *модели* $\mathfrak{M} = \langle M, \sigma \rangle$ *независима, если ни один предикат сигнатуры* σ *нельзя получить из других предикатов этой сигнатуры, связывая их логическими связками.*

Систему всех *k*-местных предикатов на *M* обозначим через $\sum_k^m (M)$.

Для модели $\mathfrak{M}^m = \langle M, \sigma^p \rangle$ с точечными предикатами сигнатуры $\sigma^P = \langle P_1, ..., P_n \rangle$, $m \in \{1, 2, ...\}$, приведем ранее полученные нами результаты.

Теорема 3. *Сигнатура* σ^P *модели* $\mathfrak{M}^m$ *полна относительно любой системы предикатов* $\sum_k^m (M)$.

Для любого $k \in \{1, 2, ...\}$ представим *k*-местный предикат через соответствующие точечные предикаты:

$$P_{i_1, i_2, ..., i_k} (x_1, x_2, ..., x_k) = P_{i_1} (x_1) \& ... \& P_{i_k} (x_k)$$

$$(i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., m\}).$$

Систему этих предикатов обозначим через $C_k^m (M)$.

Лемма 2. *Сигнатура* σ^P *модели* $\mathfrak{M}^m$ *полна относительно системы предикатов* $C_k^m (M)$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{N}^m = \langle M, \sigma^R \rangle$, где сигнатура $\sigma^R = \langle R_1, R_2, ..., R_n \rangle$ включает предикаты Радемахера.

Теорема 4. *Сигнатура* σ^R *модели* $\mathfrak{N}^m$ *полна относительно системы предикатов* $\sum_k^m (M)$.

Теорема 5. *Сигнатура* σ^R *модели* $\mathfrak{N}^m$ *независима.*

Предикаты Радемахера при синтезе распознающих автоматов

Постановка задачи

Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$ – исходное множество классифицируемых (распознаваемых) образов *x* произвольной природы; *K* – множество конструктивных (конечных) объектов; $\varphi : M \to K$ – функция кодирования образов $x \in M$ конечным множеством из *K*.

$O = \{\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, ..., \mathfrak{X}_m\}$ – обучающая выборка – семейство известных реализаций (описаний) $\mathfrak{X}_i$, $i \in \mathfrak{I}_m = \{1, 2, ..., m\}$, образов *x*, представленная матрицей обучения $O = \|u_{ij}\|_{m \times n}$, где $\bar{u}_i = \langle u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{in} \rangle$; $\mathfrak{X}$ – неизвестная реализация (описание) образа *x*, представленная предикатом $P(\tilde{x}_n)$, где $\tilde{x}_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$ – набор признаков x_j, $j = \overline{1, n}$.

$S = \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, ..., \mathfrak{N}_t\}$ – разбиение обучающей выборки *O* на классы (эталоны) $\mathfrak{N}_j : j \in \mathfrak{I}_t = \{1, 2, ..., t\}$; $\mathfrak{N}_i \bigcap \mathfrak{N}_j = \varnothing$ для $i \neq j$; $f : \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_t$ – классифицирующая функция, закрепляющая номера $i \in \mathfrak{I}_m$ элементов обучающей выборки $\mathfrak{X}_i \in O$ за номерами эталонов-классов $\mathfrak{N}_j \in S, j \in \mathfrak{I}_t$. $\mathfrak{D}_k = \{i \mid f(i) = k\}$, $k = \overline{1, t}$, – множество эталонных номеров разбиения *S*.

Необходимо смоделировать решающие правила распознавания (классификации) образа *x* для синтеза дискретного автомата симультанного типа минимальной сложности.

Описание алгоритма моделирования предикатов Радемахера при синтезе распознающих автоматов

Дискретный автомат симультанного типа для распознавания (классификации) образов содержит блок памяти с эталонами объектов и процессор, осуществляющий принятие решений предъявленному образу [5]. В целях максимального быстродействия применяется принцип параллельных вычислений решающих правил на базе предикатов Радемахера для их последующей автоматной реализуемости в виде *n*-разрядных двоичных регистров и комбинационных схем сравнения.

Функции цели задач распознавания, классификации и идентификации определим через предикаты следующим образом.

1. Распознавание.

$$(\forall x \in M)(\exists \mathfrak{X} \in K)\lceil \mathfrak{X} \in \varphi(M_i) \rceil = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathfrak{X} \in \varphi(M_i) \subseteq K, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

2. Классификация.

$$(\forall \mathfrak{X} \in O)\lceil \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j \rceil = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_j, j \in \mathfrak{I}_t, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

3. Идентификация.

$$(\forall \mathfrak{X} \in O)\lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i, j \in \mathfrak{I}_m, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для реализации в синтезируемом автомате предельно короткого (однотактного) цикла принятия решений необходимо конструктивно реализовать **условие симультанности**: сравнить предъявленную реализацию распознаваемого объекта с эталонами параллельно по всем кортежам обучающей выборки только по одному информативному значению a_i каждого признака x_j.

1) $\forall \; \bar{u}_i \in O$, $i = \overline{1, m}$, отыскивается информативный (идентификационный) элемент $a_i = u_{ij}$ такой, чтобы частный предикат

$$P(a_i) = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in \overline{u}_i = \langle u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{ij}, ..., u_{in} \rangle, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

можно было вычислить параллельно, используя только одно сравнение: $a_i * x_j$ компоненты $x_j \in \tilde{x}_n$ посредством бинарного отношения $*$ в выбранной шкале близости.

Информативный элемент a_i определяется при выполнении следующего условия:

пусть $\mathrm{V}_i^1 = \{u_{i1}, u_{i2}, ..., u_{ij,...,} u_{in}\} \neq \varnothing$; $i, j = \overline{1, l}$;

если

а) $(\forall\ i, j \in \Im_l)(i \neq j \Rightarrow \overline{u}_i \neq \overline{u}_j)$;

б) $(\forall\ i \in \Im_l)\left[\mathrm{V}_i^1 \setminus \bigcup\limits_{j \in \Im_l \setminus \{i\}} \mathrm{V}_j^1 \neq \varnothing\right]$,

то существует l информативных элементов $a_i \in \mathrm{V}_i^{l+1}$ таких, что предикат принадлежности

$$Q_i(\overline{x}) = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in \mathfrak{X}_i, \ (i \in \Im_l), \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

обращается в «единицу» тогда и только тогда, когда $\overline{x}_n = \overline{u}_i$; индекс j выбирается из условия $a_i = u_{ij}$.

2) Согласно **теореме 2** разложить полученный точечный предикат $\lceil a_i \in \overline{u}_i \rceil = P(a_i)$ по предикатам Радемахера:

$$P_k(a_i) = \tilde{R}_1^k(a_i) \,\&\, \tilde{R}_2^k(a_i) \,\&\, ... \,\&\, \tilde{R}_n^k(a_i),$$

где

$$\tilde{R}_i^k(a_i) = \begin{cases} R_i^k(a_i), \text{ если } [\nu \cdot (\text{k-1})]_{n-i+1} = 0, \ \nu = 2^n/m, \\ \neg R_i^k(a_i) \text{ в противном случае}, \\ \text{где } [\bullet] - \text{ целая часть числа}. \end{cases}$$

3) Точечный предикат $P_k(x_j)$ от неизвестной реализации $P(\tilde{x}_n)$ представляется аналогично через предикаты Радемахера:

$$P_k(x_j) = \tilde{R}_1^k(x_j) \,\&\, \tilde{R}_2^k(x_j) \,\&\, ... \,\&\, \tilde{R}_n^k(x_j),$$

где $\tilde{R}_i^k(x_j) = \begin{cases} R_i^k(x_j), \text{ если } [\nu \cdot (\text{k-1})]_{n-i+1} = 0, \\ \neg R_i^k(x_j) \text{ в противном случае}, \end{cases}$

$x_j \in \tilde{x}_n = \langle x_1, ..., x_n \rangle$, $k = \overline{1, m}$.

4) Вычисляется значение предиката идентификации: $P_k(a_i) = P_k(x_j)$.

5) Аналогичным образом выполняется разложение и вычисление предикатов классификации $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_k) = \lceil \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_k \rceil$ через систему полученных по п. 1–4 частных предикатов идентификации $P(\mathfrak{X}, \mathfrak{N}_k) = \bigvee\limits_{i \in \mathfrak{D}_k} \lceil \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_i \rceil$, где $\mathfrak{D}_k = \{i \mid f(i) = k\}$, $k = \overline{1, t}$.

Замечания

1. О неаналитических базисах непрерывных функций Уолша и дискретных функций Радемахера см. [6].

2. Доказательство леммы 2, теорем 2, 3 и определение информативного элемента a_i дано в [7, с. 3–231].

3. Определения 1, 2, доказательство теорем 4, 5, определения точечных предикатов и предикатов Радемахера, шкалы близости, понятия симультанности и реализации условий симультанности, а также определения функций цели задач распознавания, классификации и идентификации через предикаты приведены в [8].

Получено 22.12.2014

Библиографические ссылки

1. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. – М. : Энергия, 1968. – 228 с.

2. *Карповский М. Г.*, *Москалев Э. С.* Спектральные методы анализа и синтеза дискретных устройств. – Л. : Энергия, 1973. – 141 с.

3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. – М. : Наука, 1979. –272 с.

4. *Белоусов В. А.*, *Калядин Н. И.* Дискретные функции Уолша при произвольном конечном числе точек определения // Автоматические устройства учета и контроля : межвуз. сб. – Ижевск : Изд-во ИМИ, 1975. – С. 59–67.

5. *Калядин Н. И.* Распознавание отношений методом коллективного голосования // Вестник Удм. ун-та. Серия «Математика. Механика. Компьютерные науки». – Вып. 3. – Ижевск : Изд-во УдГУ, 2011. – С. 154–162.

6. *Логинов В. П.* Функции Уолша и области их применения (обзор) // Зарубежная радиоэлектроника. – 1973. – № 4. – С. 73–95.

7. *Калядин Н. И.* Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Изв. ин-та математики и информатики УдГУ. – Ижевск, 2007. – Вып. 1 (38). – С. 3–231.

8. *Калядин Н. И.* Конструирование моделей классификации конечных объектов: концепция, методы и компьютерная реализация : монография. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ имени М. Т. Калашникова, 2014. – 360 с.