

при начальных условиях; c – пьезокоэффициент вязкости; $B_f = B - N_D^{\min} / 2 \operatorname{tg} \alpha$ – длина переднего конуса инструмента, участвующая в образовании гидродинамического клина; $h_{\text{кр}} = R_z + R_{z_{\text{нар}}}$ – критическая толщина смазочного слоя, необходимая для обеспечения жидкостного трения.

Расчеты по предложенному алгоритму могут быть выполнены при нахождении инструмента в любом радиальном сечении заготовки. Это позволяет технологу при проектировании операций дорнования неравножестких заготовок осуществлять выбор рациональной схемы их нагружения внешними силами для управления НДС и технологическими показателями качества отверстия.

Библиографические ссылки

1. *Абрамов И. В., Сивцев Н. С., Щенятский А. В.* К вопросу исследования напряженно-деформированного состояния заготовки при дорновании методом конечных элементов // Известия вузов. Машиностроение. – 2004. – № 6. – С. 3–13.
2. *Высоконапряженные соединения с гарантированным натягом / И. В. Абрамов [и др.].* – Ижевск : Изд-во ИЖГТУ, 2002. – 300 с.
3. *Сивцев Н. С.* Механико-математическая модель нагружения локального контакта при ППД в нестационарных условиях трения // Известия вузов. Машиностроение. – 2004. – № 10. – С. 3–12.
4. *Янченко И. И., Сивцев Н. С., Тарасов В. В.* Технологические основы обработки точных отверстий дорнованием : в 2 ч. – Ижевск : Изд-во УдНЦ УрО РАН, 2003. – Ч. 2. Влияние контактно-кинематических условий на качество деталей и соединений. – 163 с.

N. S. Sivtsev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
K. N. Kozlova, Sarapul Polytechnic Institute

Algorithm of Mandrelling Operations Design

The finite element method is applied for the design of mandrelling operations.

Key words: algorithm, design, operations, mandrelling.

УДК 536.24: 519.63

А. М. Липанов, академик РАН, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
С. С. Макаров, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Рассматривается численное решение задачи нестационарного теплообмена высокотемпературного металлического тела прямоугольной формы в охлаждающей среде. Приводится математическая модель процесса нестационарного теплообмена при граничных условиях III рода. Получены результаты численных расчетов температуры в зависимости от геометрии, теплофизических свойств материала тела и времени процесса охлаждения. Произведено сопоставление численных расчетов с результатами, полученными с помощью программы ANSYS.

Ключевые слова: математическая модель, нестационарный теплообмен, высокотемпературное прямоугольное металлическое тело, численный расчет.

Актуальной является задача определения поля температур охлаждаемых высокотемпературных металлических тел, а также значений температуры на границе поверхности охлаждаемого тела и в искомой точке внутри тела в заданный временной интервал. При этом важным является математическая обоснованность физического процесса теплообмена.

Математическое обоснование задачи нестационарного теплообмена

Для решения задачи за основу возьмем уравнение Био – Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial t} c \rho T = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \tag{1}$$

Если $c, \rho, \lambda = \text{const}$, $a = \frac{\lambda}{c \rho}$, имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Полученное уравнение (2) можно записать в разностной форме по неявной разностной схеме в виде

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \times \left[(1-\sigma)(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + \sigma(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \right]. \quad (3)$$

Здесь аппроксимация по x имеет 2-й порядок точности. Разложим T_{i+1} и T_{i-1} в ряды Тейлора в окрестности i -й точки. Получим:

$$T_{i+1} = T_i + \frac{\partial T_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 T_i}{\partial x^4} \Delta x^4;$$

$$T_{i-1} = T_i + \frac{\partial T_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 T_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 T_i}{\partial x^4} \Delta x^4.$$

Приближенные значения 2-й производной $\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}$ обозначим $\frac{\partial^2 \tilde{T}_i}{\partial x^2}$. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_i}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 T_i}{\partial x^4} \Delta x^2.$$

Видим, что разностное выражение $\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$ аппроксимирует 2-ю производную $\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}$ со вторым порядком точности. Запишем уравнение (3) в виде [1]

$$AT_{i+1}^{n+1} - CT_{i-1}^{n+1} + BT_{i-1}^{n+1} = -F_i, \quad (4)$$

где $A = \frac{a(1-\sigma)\Delta t}{\Delta x^2}$; $C = \frac{2a(1-\sigma)\Delta t}{\Delta x^2} + 1$;

$$B = \frac{a(1-\sigma)\Delta t}{\Delta x^2}; \quad F_i = T_i^n + \frac{a\Delta t\sigma}{\Delta x^2} (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n).$$

Пусть теплофизические параметры материала тела c, ρ, λ будут переменными. Тогда в разностной форме уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} (c\rho T)_i^{n+1} &= (c\rho T)_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (1-\sigma) \times \\ &\times \left[\lambda_{i+0,5}^{n+1} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \lambda_{i-0,5}^{n+1} (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \sigma \left[\lambda_{i+0,5}^n (T_{i+1}^n - T_i^n) - \lambda_{i-0,5}^n (T_i^n - T_{i-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T_i^{n+1} &= \frac{(c\rho)_i^n}{(c\rho)_i^{n+1}} T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{(1-\sigma)}{(c\rho)_i^{n+1}} \times \\ &\times \left[\lambda_{i+0,5}^{n+1} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \lambda_{i-0,5}^{n+1} (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right] + \\ &+ \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{\sigma}{(c\rho)_i^{n+1}} \left[\lambda_{i+0,5}^n (T_{i+1}^n - T_i^n) - \lambda_{i-0,5}^n (T_i^n - T_{i-1}^n) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Если последнее равенство записать в форме уравнения (4), то коэффициенты A, B, C будут зависеть от индекса i и определяться выражениями:

$$A_i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{(1-\sigma)}{(c\rho)_i^{n+1}} \lambda_{i+0,5}^{n+1};$$

$$C_i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{(1-\sigma)}{(c\rho)_i^{n+1}} (\lambda_{i+0,5}^{n+1} + \lambda_{i-0,5}^{n+1}) + 1;$$

$$B_i = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{(1-\sigma)}{(c\rho)_i^{n+1}} \lambda_{i-0,5}^{n+1};$$

$$\begin{aligned} F_i &= \frac{(c\rho)_i^n}{(c\rho)_i^{n+1}} T_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \frac{\sigma}{(c\rho)_i^{n+1}} \times \\ &\times \left[\lambda_{i+0,5}^n (T_{i+1}^n - T_i^n) - \lambda_{i-0,5}^n (T_i^n - T_{i-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Предполагая зависимости c, ρ, λ от температуры слабыми, их величины сможем определять последовательными приближениями. В первом приближении принимаем $(c\rho)_i^{n+1} = (c\rho)_i^n$, $\lambda_{i+0,5}^{n+1} = \lambda_{i+0,5}^n$, $\lambda_{i-0,5}^{n+1} = \lambda_{i-0,5}^n$. При переменных коэффициентах c, ρ, λ частная производная $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)$ определяется с первым порядком точности. Рассмотрим далее трехмерный случай. Уравнение теплопроводности запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} c\rho T = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Трехмерную нестационарную задачу теплопроводности решим методом расщепления [2]. Запишем разностные уравнения по направлениям y и z так же, как и по направлению x в виде безусловно устойчивой локально-одномерной неявной схемы. При $\sigma = 0$ получим:

$$\begin{aligned} T_{i,j,h}^{n+\frac{1}{3}} &= \frac{(c\rho)_i^n}{(c\rho)_i^{n+\frac{1}{3}}} T_{i,j,h}^n + \frac{1}{3} \left[A_i T_{i+1,j,h} - C_i T_{i,j,h} + B_i T_{i-1,j,h} \right]^{n+\frac{1}{3}}; \\ T_{i,j,h}^{n+\frac{2}{3}} &= \frac{(c\rho)_i^{n+\frac{1}{3}}}{(c\rho)_i^{n+\frac{2}{3}}} T_{i,j,h}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} \left[A_j T_{i,j+1,h} - C_j T_{i,j,h} + B_j T_{i,j-1,h} \right]^{n+\frac{2}{3}}; \\ T_{i,j,h}^{n+1} &= \frac{(c\rho)_i^n}{(c\rho)_i^{n+1}} T_{i,j,h}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} \left[A_h T_{i,j,h+1} - C_h T_{i,j,h} + B_h T_{i,j,h-1} \right]^{n+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь каждое разностное уравнение описывает решение по одной из пространственных координат, соответствующее $1/3$ временного шага Δt . Благодаря такому подходу становится возможным при решении данной системы уравнений применить эффективный метод прогонки.

Начальное и граничные условия

Чтобы найти температуру тела в любой момент времени, нужно знать распределение температуры в начальный момент времени, геометрические x, y, z , теплофизические c, ρ, λ параметры и закон

взаимодействия тела с окружающей средой – граничные условия. Примем температуру тела при $t = 0$ равной T_0 . Рассмотрим граничные условия III рода, которые подразумевают, что на поверхности тела происходит конвективный теплообмен:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_i - T_0). \quad (7)$$

Температуру охлаждающей среды T_i считаем известной. В общем случае как T_i , так и α являются функциями времени. Записывая производную $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ в разностной форме, вместо равенства (7) получим:

$$T_{-1}^{n+1} = T_1^n + 2\Delta x \frac{\alpha^{n+1}}{\lambda_0^{n+1}} (T_i^{n+1} - T_0^{n+1}). \quad (8)$$

Используя уравнение (5) при $i = 0$ и исключая в нем T_{-1}^{n+1} с помощью равенства (8), найдем: $T_0^{n+1} = \beta_1 + \alpha_1 T_1^{n+1}$, где

$$\alpha_1 = \frac{\Delta t (\lambda_{0,5}^{n+1} + \lambda_{-0,5}^{n+1})}{(\Delta x)^2 (cp)_0^{n+1}}; \\ \beta_1 = \frac{(cp)_0^n T_0^n + \frac{2\Delta t}{\Delta x (cp)_0^{n+1}} \alpha^{n+1} \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\lambda_0^{n+1}} T_i^{n+1}}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x (cp)_0^{n+1}} \left(\frac{\lambda_{0,5}^{n+1} + \lambda_{-0,5}^{n+1}}{\Delta x} + 2\alpha^{n+1} \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\lambda_0^{n+1}} \right)}.$$

Как следует из выражения для α_1 , его величина меньше единицы. Это следует из того, что все слагаемые в знаменателе этого выражения положительные, как и числитель, и кроме того числитель равен второму слагаемому знаменателя. Покажем, что при использовании граничного условия (7) все $\alpha_i < 1$. Сделаем это на примере уравнения (6) вдоль координаты x при $\Delta x = \text{const}$.

Для этого в уравнение (4) подставим равенство

$$T_{i-1} = \beta_i + \alpha_i T_i. \quad (9)$$

Получим: $T_i = \beta_{i+1} + \alpha_{i+1} T_{i+1}$, где

$$\alpha_{i+1} = \frac{A}{C - B\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{B\beta_i + F_i}{C - B\alpha_i}. \quad (10)$$

Для решения уравнения (2) и его разностного аналога (4) помимо условия (7) необходимо задать еще одно условие при $x \rightarrow \infty$, пока тепловые волны не встретятся в центре охлаждаемого тела. После этого второе условие должно будет выполняться в центре тела. Таким условием будет равенство

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Поскольку на поверхности тела при $i = 0$ прогнанные коэффициенты α_1 и β_1 известны, то, подставляя их в равенства (10), при $i = 1$ получим $\alpha_2 = \frac{A}{C - B\alpha_1}$ и $\beta_2 = \frac{B\beta_1 + F_1}{C - B\alpha_1}$. Увеличивая последовательно i на единицу, найдем все α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$). Из граничного условия (11) при $x \rightarrow \infty$ следует, что $T_N = T_{N-1}$, тогда из равенства (9) при $i = N$ найдем:

$$T_{N-1} = \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N}. \quad (12)$$

Отсюда обратной прогонкой при известных значениях α_i и β_i найдем все T_i . При этом должно выполняться условие $\alpha_N < 1$.

Проверим это условие, учитывая формулы для коэффициентов A, B, C из выражения (10). При $i = 1$

имеем: $\alpha_2 = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \frac{2a\Delta t}{\Delta x^2} + 1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \alpha_1$. Поскольку $\alpha_1 < 1$, то

выражение для знаменателя α_2 можно записать в виде $1 + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} + \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (1 - \alpha_1)$, где все три слагаемых положительные. Так как числитель выражения для α_2 совпадает со вторым слагаемым знаменателя, то знаменатель больше числителя и α_2 , как и α_1 , меньше единицы.

Аналогично можно показать, что как α_3 , так и все остальные α_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$), в том числе и α_N , меньше единицы. Это значит, что деление на $(1 - \alpha_N)$ в равенстве (12), а вместе с ним и решение уравнения (4) возможны. Выполнив необходимые вычисления, получим поле температуры в охлаждаемом теле.

Результаты численных расчетов

Для верификации математической модели проведем сопоставления результатов численных расчетов по предлагаемой модели с результатами решения в программе ANSYS. Расчеты выполнены для объема, имеющего размеры по $X - 0,4$ м; по $Y - 0,32$ м; по $Z - 0,4$ м (см. рис. 1, а). Разностная сетка состоит из 10^6 расчетных узлов, в том числе по $X - 100$, по $Y - 100$, по $Z - 100$ расчетных точек. На рис. 1 приведено трехмерное температурное поле. Начальная температура тела $T_0 = 1000$ °С, температура охлаждающей среды $T_i = 20$ °С. Коэффициент теплопроводности материала тела $\lambda = 32$ Вт/(м·°С), коэффициент температуропроводности $a = 7 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Коэффициент теплоотдачи с поверхности в процессе охлаждения принят постоянным и равным $\alpha = 170 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$ [3].

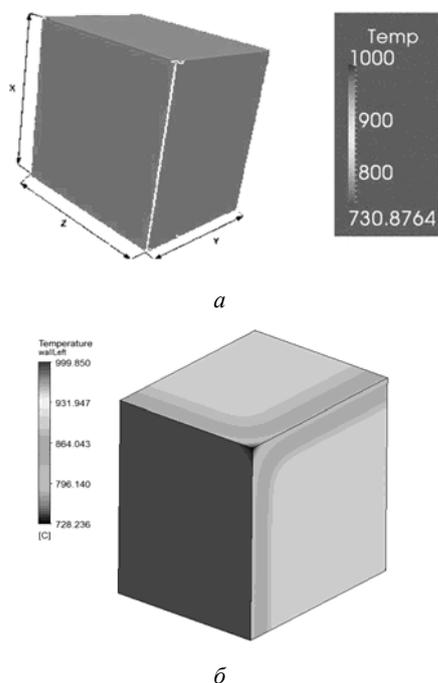


Рис. 1. Трехмерное температурное поле за расчетное время $t = 50 \text{ с}$, шаг по времени $\Delta t = 0,03 \text{ с}$: *a* – расчет по модели; *б* – расчет в ANSYS

Сравнение температур на поверхности расчетной области в крайних узловых точках, как следует из рисунка, показало хорошее совпадение результатов численного решения по предлагаемой модели с численным решением ANSYS (см. рис. 1, *б*). Сетка равномерная – $100 \times 100 \times 100$ узлов по X, Y, Z соответственно.

Рассмотрим предыдущий пример с геометрией расчетной сетки $X = 0,01 \text{ м}$; $Y = 0,01 \text{ м}$; $Z = 0,01 \text{ м}$ при условии, что теплофизические параметры материала тела: $\lambda_1 = \lambda_2$, c, ρ, λ будут переменными. Примем в качестве материала сталь 45. Параметры для металла изменяются согласно интерполяционным зависимостям, полученным при обработке табличных данных [4] в диапазоне от 20 до 800 °C:

$$\lambda = -0,000025529T^2 - 0,00668764T + 48,58873;$$

$$c = 0,00020939T^2 + 0,14089T + 476,08223;$$

$$\rho = 0,0000951467T^2 - 0,4018T + 7839,6.$$

Расчет проведен с начальной температурой тела $T_0 = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, температурой охлаждающей среды $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Полученное решение приведено на рис. 2, *a*.

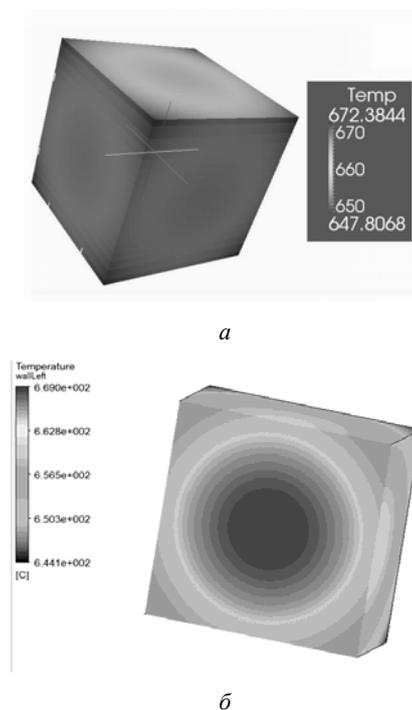


Рис. 2. Температура в расчетных узлах за время $t = 10 \text{ с}$, шаг по времени $\Delta t = 0,03 \text{ с}$, $c, \rho, \lambda = f(T)$: *a* – расчет по модели; *б* – расчет в ANSYS

Численные результаты, полученные по предлагаемой модели, практически совпадают с результатами решения ANSYS CFX (Academic research CFX Pad App лицензия инв. № M000014044 от 2007 г. ИжГТУ). При заданных исходных данных примера расхождение по температурам в расчетных узлах не превысило 0,3 %.

Библиографические ссылки

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
2. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
3. Лобасова М. С. Тепломассобмен: учеб. пособие к практическим занятиям. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 156 с.
4. URL: http://www.s-metall.com.ua/stal_45.html (дата обращения: 31.01.2012).

A. M. Lipanov, Academician of RAS, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
S. S. Makarov, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Numerical Solution of Unsteady Heat Transfer at Cooling of High-Temperature Rectangular Metallic Body

The paper considers the numerical solution of unsteady heat transfer of high-temperature rectangular metallic body in the cooling medium. A mathematical model of unsteady heat transfer with boundary conditions of the III kind is presented. Results of numerical calculations of temperature depending on geometry, thermal properties of the body material and the cooling time are obtained. Comparison of numerical results with those obtained by ANSYS is carried out.

Key words: mathematical model, unsteady heat transfer, high-temperature rectangular metallic body, numerical calculation.