

## МАТЕМАТИКА

УДК 519.87

**К. В. Кетова**, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**Е. В. Трушкова**, кандидат физико-математических наук, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

### ПОСТРОЕНИЕ АЛГОРИТМА ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ В РЕГИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ТОПЛИВОСНАБЖЕНИЯ

*Представлена постановка задачи поиска оптимальных маршрутов в региональной системе топливоснабжения. Предложен комплексный алгоритм маршрутизации, основанный на применении генетического алгоритма. Данная задача решалась при разработке республиканской целевой программы по переводу системы теплоснабжения Удмуртской Республики на местные возобновляемые виды топлива.*

**Ключевые слова:** топливоснабжение, логистика, задача маршрутизации, генетический алгоритм.

**А**ктуальная на сегодняшний день задача перевода системы теплоснабжения на местные возобновляемые энергоресурсы должна решаться с учетом логистического подхода [1]. Логистическая задача топливоснабжения региона решается в несколько этапов, на каждом из которых осуществляется решение определенных задач: маршрутизации, кластеризации, оптимального распределения ресурсов, оптимального управления запасами [2].

Одним из этапов решения логистической задачи является решение задачи маршрутизации, которая заключается в поиске оптимальных маршрутов в системе топливоснабжения по связному неориентированному графу региональной системы автодорог.

Для решения задачи маршрутизации разработано множество методов, объединенных под общим названием «методы поиска пути», которые делятся на 3 категории: простейшие, информационные и эвристические. К простейшим методам относятся, например, метод Дейкстры, метод Йена и метод «поиск в ширину». В этих методах поиск осуществляется во всех направлениях. Для нахождения оптимального маршрута необходимо пройти хотя бы раз по всем вершинам графа. К информационным методам относятся, например, метод Астар и волновой алгоритм. Поиск осуществляется в наиболее вероятном направлении. К эвристическим методам относится, например, генетический алгоритм. На каждом этапе производится поиск в наиболее вероятном направлении движения и вокруг наиболее вероятного узла графа. Необязательно определяется оптимальное решение, но найденное решение всегда близко к нему. Не все методы поиска пути находят оптимальный маршрут. В связи с этим может возникнуть ситуация с неоднозначностью полученного решения. Проблема исключения попадания в область локального экстремума потребовала применения нетради-

ционных методов: вероятностного подхода при поиске пути, осуществления поиска в наиболее вероятном направлении, применения эвристических функций оценки маршрутов и др.

Традиционные алгоритмы поиска пути практически невозможно применять для графа большой размерности. Учитывая сложность задачи, наиболее оптимальным будет «пожертвовать» абсолютной точностью традиционных алгоритмов в пользу быстрого действия эвристических методов. Таким образом, при решении задачи поиска оптимального маршрута необходимо использовать комплексный подход, который позволяет повысить точность решения без существенных потерь скорости выполнения алгоритма.

Рассмотрим множество возможных маршрутов, соединяющих два произвольных узла пересечения дорог. Обозначим траекторию  $k$ -го маршрута от узла пересечения дорог  $g_1^k$  до узла пересечения дорог  $g_{n_k}^k$  как  $M_{1n_k}^k = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_{n_k-1}^k, g_{n_k}^k)$ , где  $g_i^k$  – узлы, последовательно входящие в  $k$ -й маршрут;  $i = \overline{1, n_k}$ , где  $n_k$  – количество узлов на  $k$ -м маршруте;  $k = \overline{1, N}$ , где  $N$  – количество маршрутов.

В качестве критерия оптимизации рассматривается минимизация транспортных расходов, входящих в стоимость топлива. Введем матрицу транспортных затрат  $S^k = \{s(g_i^k, g_j^k)\}$ , где  $s(g_i^k, g_j^k)$  – транспортные затраты на перевозку одной тонны условного топлива (руб./т у.т.) от узла  $g_i^k$  до узла  $g_j^k$  ( $i, j = \{1, 2, \dots, n_k\}$ ). Транспортные затраты зависят от типа покрытия дороги  $l$  (асфальт –  $l = 1$ , щебень –  $l = 2$ , гравий –  $l = 3$ , грунт –  $l = 4$ ). При этом между двумя смежными узлами тип дорожного покрытия не меняется.

Обозначим через  $c_{ij}^k$  удельный тариф стоимости перевозки одной тонны условного топлива по дороге  $l$ -го типа от узла  $g_i^k$  до узла  $g_j^k$ , руб./ $(\text{км} \cdot \text{т} \cdot \text{у.т.})$ . Тогда транспортные затраты на перевозку топлива от узла  $g_i^k$  до узла  $g_j^k$  будут определяться по формуле

$$s(g_i^k, g_j^k) = c_{ij}^k d_{ij}^k, \quad (1)$$

где  $d_{ij}^k$  – расстояние перевозки одной тонны условного топлива от узла  $g_i^k$  до узла  $g_j^k$  по  $k$ -му маршруту, км.

Удельный тариф на перевозку одной тонны условного топлива в общем случае определяется по формуле

$$c_{ij}^k = \frac{a + u_{ij} + w_{ij}}{Gk_3}, \quad (2)$$

где  $a = \frac{P}{L_r}$  – амортизационные затраты автотранспорта ( $P$  – стоимость автотранспортного средства, руб.;  $L_r$  – эксплуатационный ресурс, км);  $u_{ij}$  – расходы на топливо, руб./км;  $w_{ij} = \frac{w}{v_{ij}}$  – расходы на оплату труда рабочих ( $w$  – почасовой тариф оплаты труда рабочих, руб./ч;  $v_{ij}$  – средняя скорость передвижения по дороге  $l$ -го типа от узла  $g_i^k$  до узла  $g_j^k$ , км/ч);  $G$  – грузоподъемность транспортного средства, т;  $k_3$  – калорийный эквивалент, т у.т./т.

Транспортные затраты на перевозку топлива от узла  $g_1^k$  до узла  $g_{n_k}^k$  по  $k$ -му маршруту складываются из транспортных затрат на перевозку топлива по каждому участку дороги:

$$s(g_1^k, g_{n_k}^k) = s(g_1^k, g_2^k) + s(g_2^k, g_3^k) + \dots + s(g_{n_k-1}^k, g_{n_k}^k). \quad (3)$$

Задача маршрутизации заключается в поиске маршрута с минимальными транспортными затратами на перевозку 1 т у.т. от узла  $g_1^k$  до узла  $g_{n_k}^k$ :

$$s(g_1, g_n) = \min_k s(g_1^k, g_{n_k}^k). \quad (4)$$

Для решения задачи маршрутизации в системе топливоснабжения региона предложен комплексный алгоритм, состоящий из трех этапов:

1) нахождение первоначального (опорного) маршрута с помощью модифицированного алгоритма А\* (Астар);

2) получение множества допустимых маршрутов с помощью метода Йена;

3) нахождение оптимального маршрута с помощью генетического алгоритма [3], адаптированного под задачу маршрутизации.

Алгоритм А\* позволяет определить маршрут с наименьшей стоимостью перевозки топлива от начального узла  $g_1^k$  до конечного  $g_{n_k}^k$ . Модификация алгоритма А\* заключается в применении вероятностного подхода при построении маршрута.

Модифицированный алгоритм А\* включает в себя следующие этапы.

1. Формируется маршрут  $M_{1i}^k$ , состоящий из начального узла:

$$M_{1i}^k = (g_i^k), \quad i = 1. \quad (5)$$

2. Рассматриваются узлы  $j = 1, \overline{n^{(i)}}$ , смежные с данным  $i$ -м узлом;  $n^{(i)}$  – количество узлов, смежных с  $i$ -м узлом. Для каждого из этих узлов определяется эвристическая функция:

$$f(M_{1j}^k) = \bar{s}(M_{1j}^k) + \bar{h}(M_{jn_k}^k), \quad (6)$$

где  $\bar{s}(M_{1j}^k)$  – оценка стоимости перевозки от начального узла  $g_1^k$  до рассматриваемого узла  $g_j^k$ ;  $\bar{h}(M_{jn_k}^k)$  – оценка расстояния от рассматриваемого узла  $g_j^k$  до конечного узла  $g_{n_k}^k$ , определяемые по формулам:

$$\bar{s}(M_{1j}^k) = \sum_{i=1}^{j-1} d_{i(i+1)}^k c_{i(i+1)}^k, \quad (7)$$

$$\bar{h}(M_{m_k n_k}^k) = \tau \bar{c} r_{m_k n_k}^k, \quad (8)$$

где  $d_{i(i+1)}^k$  – длина дороги, соединяющей  $i$ -й и  $(i+1)$ -й узел  $k$ -го маршрута;  $c_{i(i+1)}^k$  – удельный тариф, представляющий собой стоимость перевозки одной тонны условного топлива на расстояние 1 км на промежутке от  $i$ -го до  $(i+1)$ -го о узла  $k$ -го маршрута по дороге  $l$ -го типа;  $\tau$  – коэффициент кривизны дороги,  $\tau \geq 1$ ;  $\bar{c}$  – средний удельный тариф;  $r_{m_k n_k}^k$  – расстояние между рассматриваемым узлом  $g_j^k$  и конечным узлом  $g_{n_k}^k$ .

3. Для узлов, в которых рассчитана функция  $f(M_{1j}^k)$  на этапе 2, определяется функция вероятности:

$$P(M_{1j}^k) = \frac{[f(M_{1i}^k) - f(M_{1j}^k)]^\lambda}{\sum_{j=1}^{n^{(i)}} [f(M_{1i}^k) - f(M_{1j}^k)]^\lambda}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  – задаваемый параметр, определяющий силу влияния функции  $f(M_{1i}^k)$  на вероятностную функцию  $P(M_{1i}^k)$ ,  $0 < \lambda < \infty$ .

4. Генерируется случайным образом равномерно распределенная величина  $\xi \in [0, 1]$ . Среди всех узлов выбирается тот, вероятность (9) попадания в который наиболее близка к генерированной случайной величине. Эта процедура проводится для того, чтобы увеличить вероятность попадания в глобальный минимум. Найденный узел добавляется в маршрут:

$$M_{li}^k = (g_1^k, \dots, g_i^k, g_{i+1}^k). \quad (10)$$

5. Проверяется условие окончания работы алгоритма – условие попадания в конечный узел:  $i = n_k$ . Если условие выполняется, то маршрут от начального узла  $g_1^k$  до конечного узла  $g_{n_k}^k$  считается найденным. Иначе осуществляется переход к этапу 2.

В результате реализации модифицированного алгоритма  $A^*$  определяется опорный маршрут. Далее с помощью метода Йена строится множество допустимых маршрутов.

Алгоритм метода Йена включает в себя следующие этапы.

1. Задается первоначальный маршрут, определенный с помощью модифицированного алгоритма  $A^*$ :

$$M_{1n_k}^k = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_{n_k}^k), \quad k = 1, \quad i = 1.$$

2. Из маршрута  $M_{1n_k}^k$  исключается ребро  $(g_i^k, g_{i+1}^k)$ . Далее с использованием узлов, не входящих в  $k$ -й маршрут, с помощью модифицированного алгоритма  $A^*$  находятся новые маршруты:

$$M_{1n_j}^j = (g_1^j, g_2^j, \dots, g_{n_j}^j), \quad j = 1, \overline{n^{(i)}}, \quad (11)$$

где  $j = 1, \overline{n^{(i)}}$  – номера построенных маршрутов;  $n^{(i)}$  – количество построенных маршрутов.

3. Из найденных маршрутов выбирается маршрут с наименьшими транспортными затратами:

$$M_{1n_{k+1}}^{k+1} = M_{1n_{j_{\min}}}^j,$$

где  $j_{\min} = \arg \min_{j=1, n^{(i)}} s(g_1^j, g_{n_j}^j)$ ,  $k := k + 1$ . (12)

4. Проверяется условие  $k \geq N$ , где  $N$  – задаваемое количество допустимых маршрутов (определяется как количество маршрутов, составляющих начальную популяцию, задаваемую для работы генетического алгоритма). Если данное условие не выполняется, тогда  $i := i + 1$  и осуществляется переход к этапу 2.

Таким образом, определены допустимые маршруты. Далее к найденным допустимым маршрутам применяется генетический алгоритм. Блок-схема генетического алгоритма, адаптированного под задачу маршрутизации, приведена на рис. 1.

Критерием остановки работы генетического алгоритма является нахождение маршрута с минимальными транспортными затратами, который будет оставаться неизменным при последующих итерациях.

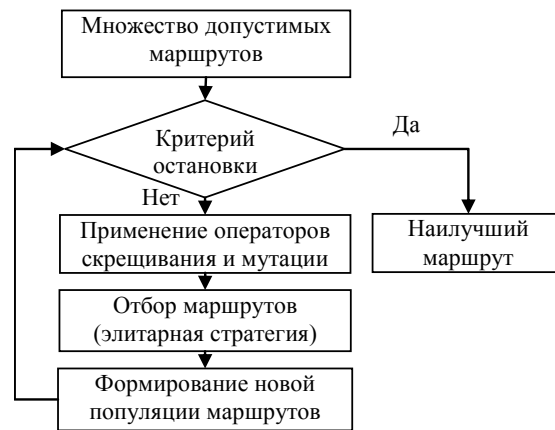


Рис. 1. Блок-схема генетического алгоритма, адаптированного под задачу маршрутизации

Важной частью алгоритма является операция применения оператора скрещивания, который используется в случае наличия у двух маршрутов общего узла или общего ребра.

Для примера приведем алгоритм применения оператора скрещивания по общему узлу.

1. Пусть имеются два допустимых маршрута:

$$M_{1n_k}^k = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_{n_k}^k), \quad (13)$$

$$M_{1n_l}^l = (g_1^l, g_2^l, \dots, g_{n_l}^l). \quad (14)$$

Для маршрутов (13), (14) начальный и конечный узлы совпадают:

$$g_1^k = g_1^l, \quad g_{n_k}^k = g_{n_l}^l, \quad (15)$$

а также имеется общий узел

$$g_i^k = g_j^l, \quad i \in \{2, 3, \dots, n_k - 1\}, \quad j \in \{2, 3, \dots, n_l - 1\}. \quad (16)$$

2. Маршруты (13) и (14) скрещиваются по общему узлу (16) и определяются новые маршруты:

$$M_{1n_l}^{kl} = (g_1^k, g_2^k, \dots, g_{i-1}^k, g_i^l, g_{j+1}^l, \dots, g_{n_l-1}^l, g_{n_l}^l), \quad (17)$$

$$M_{1n_k}^{lk} = (g_1^l, g_2^l, \dots, g_{j-1}^l, g_j^k, g_{i+1}^k, \dots, g_{n_k-1}^k, g_{n_k}^k). \quad (18)$$

3. Для вновь найденных маршрутов рассчитываются стоимости перевозок одной тонны условного топлива (1), (3). Если стоимости перевозок по новым маршрутам (17), (18) ниже стоимости перевозок по исходным маршрутам (13), (14), то они участвуют в дальнейшей работе генетического алгоритма.

Генетический алгоритм, адаптированный под задачу маршрутизации, использует оператор мутации. Мутация осуществляется с использованием метода Йена: из маршрута, подвергаемого мутации, случайным образом исключается ребро, далее с помощью алгоритма Астар достраивается новый маршрут.

Реализация вышеперечисленных операторов скрещивания и мутации носит вероятностный характер. При практической реализации генетических операторов задается некоторое фиксированное число  $p_f$ ,

затем производится генерация случайного числа  $p$  из отрезка  $[0, 1]$ . Если  $p \leq p_f$ , то оператор выполняется. Для оператора скрещивания  $p_c \in [0, 5; 1]$ , в то время как для операторов мутации  $p_m \in [0, 01; 0, 1]$  [4].

Для настройки оптимизационных параметров разработанного алгоритма маршрутизации и проверки его точности проведено тестирование. При оценке исследовались такие характеристики, как скорость работы алгоритма и точность полученного решения. Скорость работы определяется как время нахождения маршрута  $T_M$  (сек.). Точность полученного решения определяется на основе оценки отклонения длины маршрута  $\Delta D_M$  (км), полученного с помощью алгоритма маршрутизации, от оптимального значения, а также оценки отклонения транспортных затрат маршрута  $\Delta S_M$  (руб./т у.т.), полученного с помощью алгоритма маршрутизации, от оптимального значения  $S_{\text{опт}}$ .

При разработке алгоритма решения задачи маршрутизации было выделено четыре параметра: эвристический параметр  $\lambda$  (9), диапазон значений  $\lambda \in [0, 2; 2, 4]$ , значения параметра изменялись с шагом  $\Delta\lambda = 0, 2$ ;  $N$  – задаваемое количество допустимых маршрутов, составляющих популяцию генетического алгоритма,  $N \in [5; 100]$ ,  $\Delta N = 5$ ; вероятность скрещивания  $p_c \in [0, 5; 1]$ ,  $\Delta p_c = 0, 05$ ; вероятность мутации  $p_m \in [0, 01; 0, 1]$ ,  $\Delta p_m = 0, 01$ .

На рис. 2 представлены графики зависимости времени работы алгоритма и точности полученного решения от параметра  $\lambda$ . Из графиков видно, что с увеличением параметра  $\lambda$  возрастает время работы алгоритма, при этом точность полученного решения изменяется незначительно, поэтому для работы алгоритма использовалось значение параметра  $\lambda$ , равное 1,6. В этом случае отклонение транспортных затрат от оптимального значения  $\tilde{\delta}_S = \Delta S_M / S_{\text{опт}}$  не превышает 1 %.

Аналогично определены значения других параметров алгоритма маршрутизации. Так, на рис. 3 представлены графики влияния количества допустимых маршрутов на время работы алгоритма и точность полученного решения.

#### Параметры алгоритма маршрутизации

Параметр	Диапазон тестирования	Шаг изменения значения	Выбранное значение параметра
$\lambda$ – эвристический параметр	[0,2; 2,4]	0,1	1,6
$N$ – количество допустимых маршрутов	[5; 100]	5	35
$p_c$ – вероятность скрещивания	[0,5; 1,0]	0,05	0,9
$p_m$ – вероятность мутации	[0,01; 0,10]	0,01	0,07

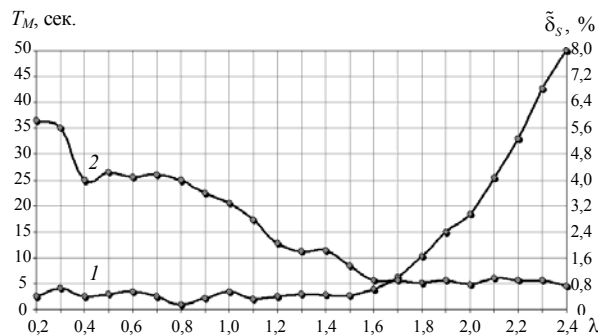


Рис. 2. Влияние параметра  $\lambda$  на время работы алгоритма (1) и точность полученного решения (2)

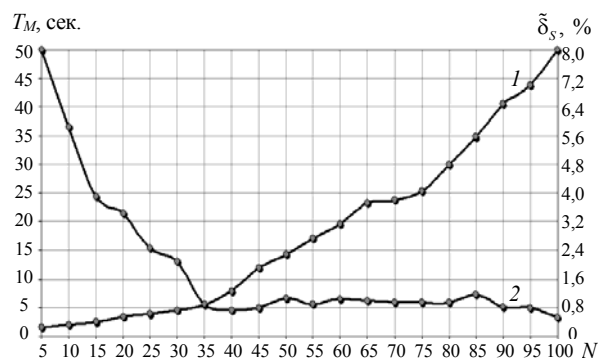


Рис. 3. Влияние параметра  $N$  на время работы алгоритма (1) и точность полученного решения (2)

Оптимальные значения параметров алгоритма маршрутизации представлены в таблице.

В результате применения разработанного алгоритма маршрутизации были найдены оптимальные маршруты поставок для распределенной системы теплоснабжения Удмуртской Республики. Так, например, маршруты поставок древесного сырья для Дебесского района УР представлены на рис. 4, а. Оптимальные маршруты перевозок топлива с пунктов подготовки топлива до теплоисточников представлены на рис. 4, б.

Оптимальные маршруты перевозок древесного сырья с пунктов накопления на пункты подготовки топлива, а также оптимальные маршруты перевозок топлива с пунктов подготовки до теплоисточников Удмуртской Республики представлены на рис. 5.

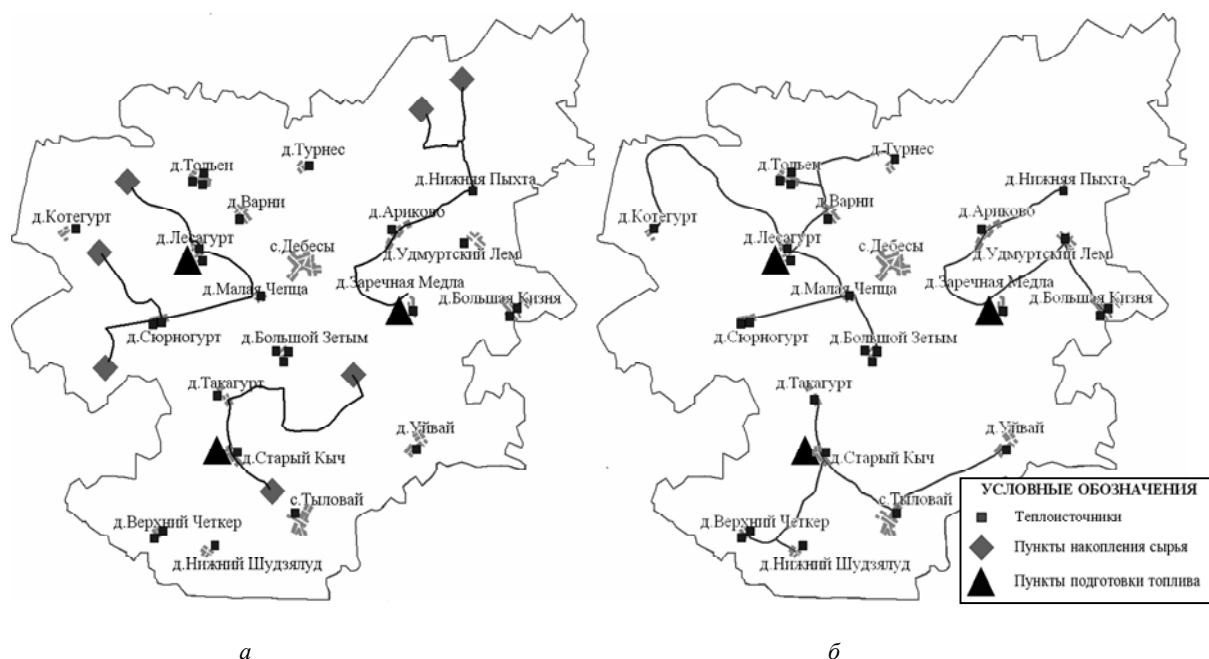


Рис. 4. Схема маршрутов для Дебесского района УР: а – перевозки древесного сырья с пунктов накопления сырья на пункты подготовки топлива; б – перевозки топлива с пунктов подготовки топлива на теплоисточники

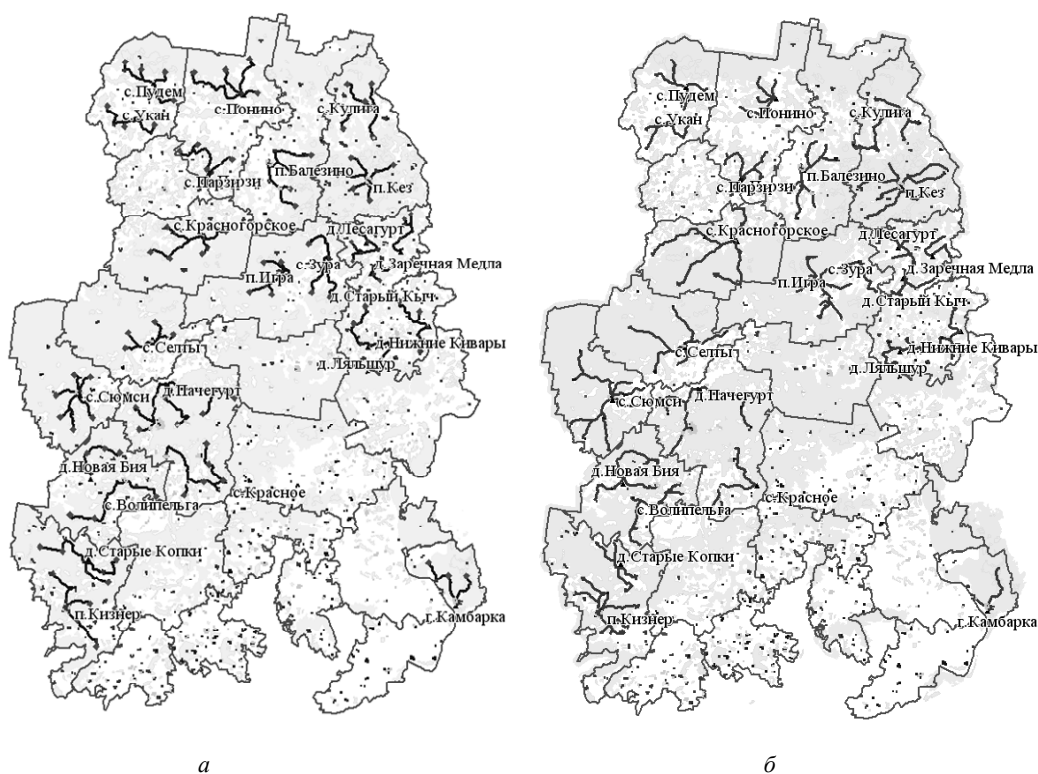


Рис. 5. Оптимальные маршруты для Удмуртской Республики: а – перевозки древесного сырья с пунктов накопления сырья на пункты подготовки топлива; б – перевозки топлива с пунктов подготовки топлива на теплоисточники

**Библиографические ссылки**

1. Разработка концепции топливообеспечения распределенной региональной системы теплоснабжения местными возобновляемыми видами топлива / И. Г. Русяк [и др.] // Энергобезопасность и энергосбережение. – 2010. – № 5. – С. 14–20.
2. Rusyak I., Ketova K., Trushkova E. Logistic Task of Fuel Supply for the Regional Distributed Heat Supply System //

Journal of Knowledge Management, Economics and Information Technology. – 2011. – No. 1(7). – P. 445–477.

3. Тенев В. А., Якимович Б. А. Генетические алгоритмы в моделировании систем : монография. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2010. – 306 с.

4. Рутковская Д., Пилиньский М. Информационные нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М. : Телеком, 2004. – 452 с.

*K. V. Ketova*, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

*E. V. Trushkova*, PhD (Physics and Mathematics), Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Construction of Optimal Routing Algorithm in Regional System of Fuel Supply

The paper presents statement of optimal routing task in the regional system of fuel supply. The complex routing algorithm based on application of genetic algorithm is proposed. This task was solved in development of the republican specified purpose program on transition of the Udmurt fuel supply system to local renewable fuels.

**Key words:** fuel supply, logistics, routing task, genetic algorithm.

УДК 519.866

**К. В. Кетова**, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**Е. А. Дерендяева**, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассматривается алгоритм решения задачи оптимального управления региональной экономической системой. Приводятся результаты решения задачи оптимального управления на примере Удмуртской Республики. Показано, что оптимальное управление, устраняя дисбаланс между факторами производства, приводит к существенному повышению эффективности.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, человеческий капитал, экономическая система региона.

### Математическая модель экономической системы региона

В качестве показателей макроэкономической системы региона примем объем валового регионального продукта (ВРП)  $Y$ , стоимость производственного капитала  $K$ , человеческого капитала  $H$ , объемы инвестиций в производственный капитал  $I$ , человеческий капитал  $J$ , объем потребления  $C$  и доходы регионального бюджета  $D$ . Соответствующий паспорт неизвестных задачи имеет вид  $(Y, K, H, I, J, C, D)_t$ ,  $t$  – время. Для описания динамики производственного капитала и человеческого капитала используем эволюционные уравнения, рассмотренные в работах [1, 2]; здесь  $\eta$  и  $\chi$  – коэффициенты выбытия производственного и человеческого капитала соответственно;  $\bar{\epsilon}$  – усредненная по всем возрастам доля населения, участвующего в общественном производстве.

Общая постановка задачи макроэкономической динамики включает в себя следующие соотношения [3]:

$$E = Y + T - N^F - R = I + J + C - B, \quad (1)$$

$$s_0 + s_k + s_h - s_b = 1, \quad (2)$$

$$Y = F(K, H) = AK^\alpha H^\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

$$C = s_0 E, \quad I = s_k E, \quad J = s_h E, \quad B = s_b E,$$

$$T = \nu \rho^R \cup Y, \quad N^F = \rho^F \cup Y, \quad (4)$$

$$E = \omega F(K, H), \quad \omega = 1 + \nu \rho^F \left[ \nu (\rho^R / \rho^F) - 1 \right],$$

$$D = (1 + \nu) \rho^R \cup Y. \quad (5)$$

$$\dot{K}(t) = s_k E(t) - \eta K(t), \quad K_0 = K(t_0), \quad K_T = K(t_T); \quad (6)$$

$$\dot{H}(t) = s_h \bar{\epsilon} E(t) - \chi H(t), \quad H_0 = H(t_0),$$

$$H_T = H(t_T); \quad (7)$$

$$\dot{Z}(t) = s_b E(t) - \sigma Z(t), \quad Z_0 = Z(t_0),$$

$$Z_T = Z(t_T); \quad R(t) = (p + \sigma) Z(t). \quad (8)$$

### Алгоритм решения задачи оптимального управления региональной экономической системой

Рассмотрим задачу оптимального управления, взяв за основу постановку задачи (1)–(7):

$$Cr = \int_{t_0}^{t_T} s_0 \lambda \omega F(k, h) e^{-\delta(t-t_0)} dt \rightarrow \max_{s \in \Omega}, \quad (9)$$

где положим  $s_0 = \text{const}$ ;  $s_b = 0$ ;

$$\Omega = \left\{ s = (s_l) = (s_k, s_h) : s_l \in [0, 1], \sum_l s_l = 1 - s_0 \right\}. \quad (10)$$

Используя свойство линейной однородности производственной функции Кобба – Дугласа, запишем