

*K. V. Ketova*, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

*E. V. Trushkova*, PhD (Physics and Mathematics), Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Construction of Optimal Routing Algorithm in Regional System of Fuel Supply

The paper presents statement of optimal routing task in the regional system of fuel supply. The complex routing algorithm based on application of genetic algorithm is proposed. This task was solved in development of the republican specified purpose program on transition of the Udmurt fuel supply system to local renewable fuels.

**Key words:** fuel supply, logistics, routing task, genetic algorithm.

УДК 519.866

**К. В. Кетова**, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**Е. А. Дерендяева**, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассматривается алгоритм решения задачи оптимального управления региональной экономической системой. Приводятся результаты решения задачи оптимального управления на примере Удмуртской Республики. Показано, что оптимальное управление, устраняя дисбаланс между факторами производства, приводит к существенному повышению эффективности.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, человеческий капитал, экономическая система региона.

### Математическая модель экономической системы региона

В качестве показателей макроэкономической системы региона примем объем валового регионального продукта (ВРП)  $Y$ , стоимость производственного капитала  $K$ , человеческого капитала  $H$ , объемы инвестиций в производственный капитал  $I$ , человеческий капитал  $J$ , объем потребления  $C$  и доходы регионального бюджета  $D$ . Соответствующий паспорт неизвестных задачи имеет вид  $(Y, K, H, I, J, C, D)_t$ ,  $t$  – время. Для описания динамики производственного капитала и человеческого капитала используем эволюционные уравнения, рассмотренные в работах [1, 2]; здесь  $\eta$  и  $\chi$  – коэффициенты выбытия производственного и человеческого капитала соответственно;  $\bar{\epsilon}$  – усредненная по всем возрастам доля населения, участвующего в общественном производстве.

Общая постановка задачи макроэкономической динамики включает в себя следующие соотношения [3]:

$$E = Y + T - N^F - R = I + J + C - B, \quad (1)$$

$$s_0 + s_k + s_h - s_b = 1, \quad (2)$$

$$Y = F(K, H) = AK^\alpha H^\beta, \quad \alpha + \beta = 1, \quad (3)$$

$$C = s_0 E, \quad I = s_k E, \quad J = s_h E, \quad B = s_b E,$$

$$T = \nu \rho^R \cup Y, \quad N^F = \rho^F \cup Y, \quad (4)$$

$$E = \omega F(K, H), \quad \omega = 1 + \nu \rho^F \left[ \nu (\rho^R / \rho^F) - 1 \right],$$

$$D = (1 + \nu) \rho^R \cup Y. \quad (5)$$

$$\dot{K}(t) = s_k E(t) - \eta K(t), \quad K_0 = K(t_0), \quad K_T = K(t_T); \quad (6)$$

$$\dot{H}(t) = s_h \bar{\epsilon} E(t) - \chi H(t), \quad H_0 = H(t_0),$$

$$H_T = H(t_T); \quad (7)$$

$$\dot{Z}(t) = s_b E(t) - \sigma Z(t), \quad Z_0 = Z(t_0),$$

$$Z_T = Z(t_T); \quad R(t) = (p + \sigma) Z(t). \quad (8)$$

### Алгоритм решения задачи оптимального управления региональной экономической системой

Рассмотрим задачу оптимального управления, взяв за основу постановку задачи (1)–(7):

$$Cr = \int_{t_0}^{t_T} s_0 \lambda \omega F(k, h) e^{-\delta(t-t_0)} dt \rightarrow \max_{s \in \Omega}, \quad (9)$$

где положим  $s_0 = \text{const}$ ;  $s_b = 0$ ;

$$\Omega = \left\{ s = (s_l) = (s_k, s_h) : s_l \in [0, 1], \sum_l s_l = 1 - s_0 \right\}. \quad (10)$$

Используя свойство линейной однородности производственной функции Кобба – Дугласа, запишем

фазовые уравнения удельной величины производственных фондов  $k = K/L$  и человеческого капитала  $h = H/L$  в виде

$$\dot{k} = s_k \omega F(k, h) - \gamma_k k, \quad \dot{h} = s_h \bar{\varepsilon} \omega F(k, h) - \gamma_h h, \quad (11)$$

где  $F(k, h) = F(K, H)/L$ ;  $\gamma_k = \eta + \dot{L}/L$ ;

$$\gamma_h = \chi + \dot{L}/L.$$

Гамильтониан задачи имеет вид

$$H(\psi, s, x, t) = s_0 \lambda \omega F(k, h) e^{-\delta(t-t_0)} + \psi_k [s_k \omega F(k, h) - \gamma_k k] + \psi_h [s_h \bar{\varepsilon} \omega F(k, h) - \gamma_h h]. \quad (12)$$

В соответствии с принципом максимума Понтрягина в обозначениях  $q = \psi e^{\delta(t-t_0)}$  получаем:

$$s^o = \arg \max_{s \in \Omega} H(q, s, x, t) = \arg \max_{s \in \Omega} [s_0 \lambda \omega F(k, h) + q_k s_k \omega F(k, h) + q_h s_h \bar{\varepsilon} \omega F(k, h)]. \quad (13)$$

Определение оптимального управления сводится к решению линейной задачи математического программирования для каждого момента времени:

$$\lambda s_0 + q_k s_k + q_h \bar{\varepsilon} s_h = Qs \rightarrow \max_{s_k, s_h} = \lambda s_0 + Q_m (1 - s_0), \quad (14)$$

$$s_0 + s_k + s_h = 1, \quad (15)$$

где  $Qs$  – скалярное произведение векторов  $Q = (\lambda, Q_k, Q_h) = (\lambda, q_k, q_h \bar{\varepsilon})$  и  $s = (s_0, s_k, s_h)$ ;  
 $Q_m = \max(Q_k, Q_h)$ .

При этом система сопряженных уравнений имеет вид

$$\dot{k} = s_k \omega F(k, h) - \gamma_k k, \quad k_0 = k(t_0), \quad k_T = k(t_T) \Rightarrow k^*; \quad (16a)$$

$$\dot{h} = s_h \bar{\varepsilon} \omega F(k, h) - \gamma_h h; \quad h_0 = h(t_0), \quad h_T = h(t_T) \Rightarrow h^*; \quad (16b)$$

$$\dot{q}_k = (\delta + \gamma_k) q_k - [\lambda s_0 + Q_m (1 - s_0)] \omega F'_k(k, h); \quad (17a)$$

$$\dot{q}_h = (\delta + \gamma_h) q_h - [\lambda s_0 + Q_m (1 - s_0)] \omega F'_h(k, h). \quad (17b)$$

Квазистационарный участок оптимальной траектории  $(k_t^*, h_t^*)$  [4] определяется из условий  $q_k = \bar{\varepsilon} q_h = Q_m$ , откуда следует  $\dot{q}_k = \bar{\varepsilon} \dot{q}_h = \dot{Q}_m$ . Уравнения (17) преобразуются к виду

$$\dot{Q}_m = (\delta + \gamma_k) Q_m - [\lambda s_0 + Q_m (1 - s_0)] \omega F'_k(k, h), \quad (18a)$$

$$\dot{Q}_m = (\delta + \gamma_h) Q_m - [\lambda s_0 + Q_m (1 - s_0)] \omega \bar{\varepsilon} F'_h(k, h). \quad (18b)$$

Комбинируя уравнения (16) и используя условие линейной однородности производственной функции, получим:

$$\dot{w} = (s_k - s_h \bar{\varepsilon} w) \omega f'(w) - (\gamma_k - \gamma_h) w, \quad (19)$$

где  $f(w) = Aw^\alpha$ ;  $w = k/h$ ;  $w_0 = w(t_0) = K_0/H_0$ .

Учитывая, что  $F'_k(k, h) = f'(w)$  и  $F'_h(k, h) = f(w) - wf'(w)$ , из (18) имеем:

$$Q_m = \frac{\lambda s_0 \omega \{f'(w) - \bar{\varepsilon} [f(w) - wf'(w)]\}}{(\gamma_k - \gamma_h) - (1 - s_0) \omega \{f'(w) - \bar{\varepsilon} [f(w) - wf'(w)]\}} = Q_m(w_t, \lambda_t). \quad (20)$$

Используя, например, уравнение (18a) для квазистационарной траектории, где  $q_k = Q_m$ , получаем:

$$\dot{Q}_m = \frac{\partial Q_m}{\partial w} \dot{w} + \frac{\partial Q_m}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = (\delta + \gamma_k) Q_m - [\lambda s_0 + Q_m (1 - s_0)] \omega f'(w). \quad (21)$$

Уравнение для функции  $w = w(t)$  имеет вид (19), а функция  $\lambda = \lambda(t)$  определяется экзогенно после вычисления демографической кривой [5].

В итоге, воспользовавшись формулами (18), (19), из (20) получаем

$$Z(w^*, s_k^*, s_h^*) = 0, \quad (22)$$

где  $Z$  – известная по построению функция. Последнее уравнение совместно с уравнением (19), записанным в форме

$$\dot{w}^* = (s_k^* - s_h^* \bar{\varepsilon} w^*) \omega f'(w^*) - (\gamma_k - \gamma_h) w^*, \quad (23)$$

и условием

$$s_k^* + s_h^* = 1 - s_0 \quad (24)$$

позволяет рассчитать квазистационарную траекторию сбалансированного роста при условии, что значение переменной  $w_0^* = w^*(t_0)$  в начальный момент времени  $t = t_0$  известно.

Для определения квазистационарной траектории будем использовать метод последовательных приближений, учитывая то обстоятельство, что квазистационарная кривая  $w_t^*$  и двойственная переменная  $(Q_m)_t$  – медленно меняющиеся функции времени, темп изменения которых намного меньше темпа изменения функций  $w_t$  и  $Q_t$  в переходном периоде. Таким образом, полагая в нулевом приближении  $\dot{Q}_m^{(0)} = 0$ , определяем первое приближение функции  $w_t^{*(1)}$  из уравнения, вытекающего из системы (18):

$$\frac{f'(w)}{\delta + \gamma_k} = \frac{\bar{\varepsilon} [f(w) - wf'(w)]}{\delta + \gamma_h}. \quad (25)$$

Последующие приближения функции  $Q_m$  находим из формулы (19), а функции  $w$  – из рекуррентных формул:

$$\dot{Q}_m^{(n)} = (\delta + \gamma_k) Q_m^{(n+1)} - [\lambda s_0 + Q_m^{(n+1)} (1 - s_0)] \omega f'(w^{(n+1)}), \tag{26}$$

где согласно (20)  $Q_m^{(n+1)} = Q_m(w_t^{(n+1)}, \lambda_t)$ ;  $n = 1, 2, \dots$  – номер приближения. Этот процесс повторяется до тех пор, пока

$$\|w^{*(n+1)} - w^{*(n)}\| = \max_{t \in [t_0, t_T]} |w^{*(n+1)} - w^{*(n)}| \leq \varepsilon.$$

После определения квазистационарной кривой  $w_t^*$  соответствующее ей управление находится из системы уравнений (23), (24).

Оптимальная траектория  $w_t$  в переходном периоде определяется путем решения уравнения (19) с использованием правила выбора управлений:

$$s^o = (s_k, s_h) = \begin{cases} (1 - s_0, 0), & \text{если } w < w^*; \\ (s_k^*, s_h^*), & \text{если } w = w^*; \\ (0, 1 - s_0), & \text{если } w > w^*. \end{cases} \tag{27}$$

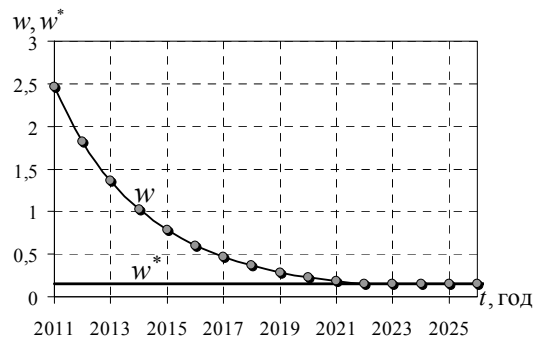
**Результаты решения задачи оптимального управления региональной экономической системой на примере Удмуртской Республики**

Расчеты проводились для региональной экономической системы Удмуртской Республики (УР). В результате решения задачи идентификации неизвестных параметров модели (1)–(7) по статистическим данным [6] было получено значение нормы потребления  $s_0 = 0,704$ .

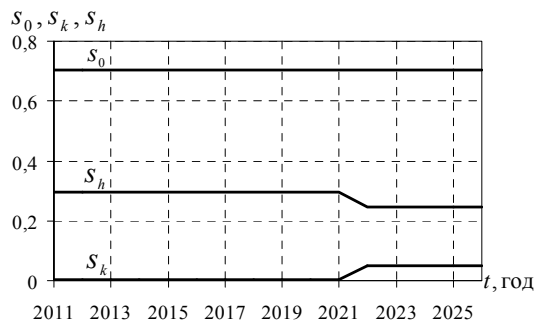
На рисунке 1 представлен выход экономической системы на траекторию сбалансированного роста за 15-летний период (2011–2026 гг.), а также соответствующее оптимальное управление. Экономическая система выходит на траекторию сбалансированного роста к 2022-му году.

На рисунке 2 представлена динамика удельных величин производственного и человеческого капитала, а также динамика удельного общественного потребления и удельного значения ВРП (производительности труда). За рассмотренный период удельный производственный капитал уменьшается в 3,1 раза, что дает возможность увеличиться человеческому капиталу за этот же период в 5,2 раза. Удельное потребление в случае решения задачи оптимального управления в конце изучаемого периода увеличивается более чем в 3 раза, а производительность труда увеличивается к 2026-му году в 3,1 раза.

Рассмотрим влияние нормы потребления на критериальный функционал (8) задачи оптимального управления в пределах  $s_0 \in [0, 1]$  при  $T = 15$  лет. Расчеты показали, что увеличение накопленного потребления более чем в 2 раза достигается в диапазоне изменения доли потребления от 0,01 до 0,73. Наибольшего значения накопленное потребление достигает при норме потребления 0,36 (см. рис. 3).

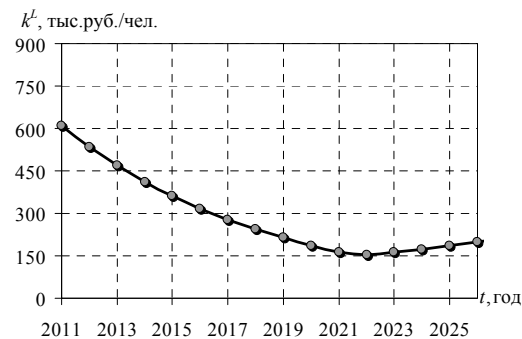


а

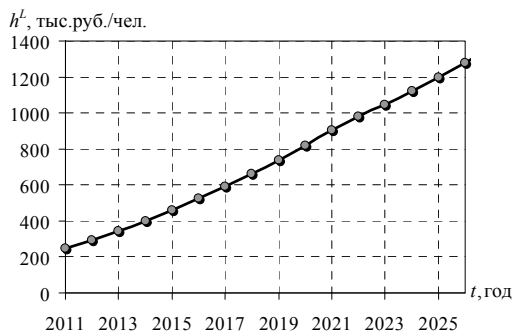


б

Рис. 1. Результаты решения задачи оптимального управления: а – выход экономической системы на траекторию сбалансированного роста:  $w$  – оптимальная траектория движения экономической системы,  $w^*$  – траектория сбалансированного роста; б – динамика параметров управления инвестициями

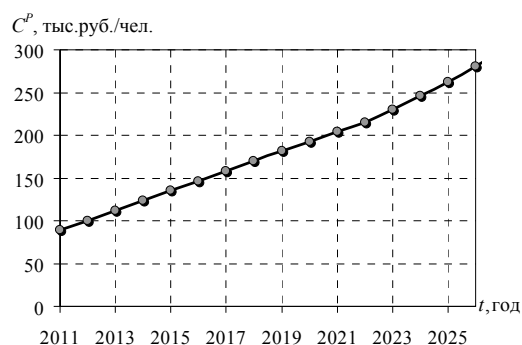


а

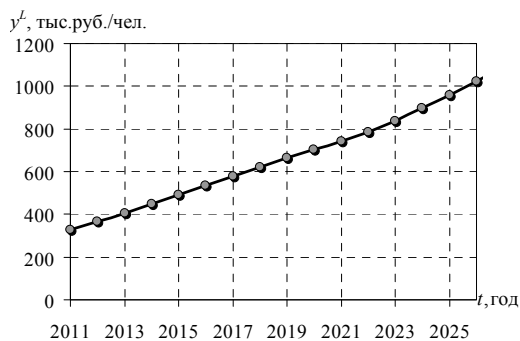


б

Рис. 2. Динамика удельных величин экономических показателей региона при оптимальном управлении: а – производственного капитала, б – человеческого капитала



6



2

Рис. 2 (окончание). Динамика удельных величин экономических показателей региона при оптимальном управлении: 6 – потребления, 2 – производительности труда

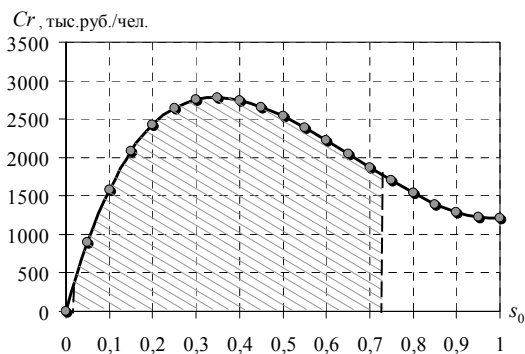


Рис. 3. Зависимость накопленного потребления от нормы потребления в задаче оптимального управления при  $T = 15$  лет

На рис. 4 представлены графики удельного потребления, накопленного до момента  $t$ , полученные при нормах потребления  $s_0 = 0,01$ ,  $s_0 = 0,36$ ,  $s_0 = 0,73$  и  $s_0 = 0,704$ . Как видно из графиков, при  $s_0 = 0,01$  накопленное к 2026-му году потребление

будет ниже этой же величины, рассчитанной при  $s_0 = 0,704$ , в 2,1 раза. Накопленное к 2026-му году потребление при  $s_0 = 0,73$  несущественно выше, чем при норме  $s_0 = 0,704$  (в 1,1 раза).

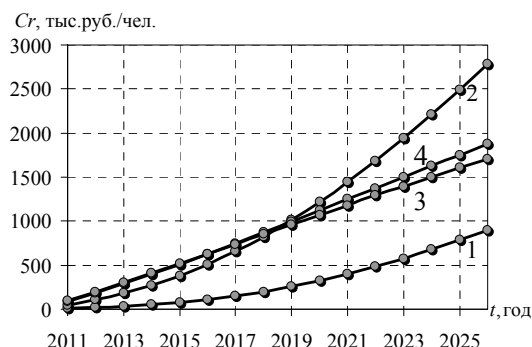


Рис. 4. Изменение накопленного удельного потребления с течением времени: 1 –  $s_0 = 0,01$  – управление; 2 –  $s_0 = 0,36$  – управление; 3 –  $s_0 = 0,73$  – управление; 4 –  $s_0 = 0,704$  – управление

Проведенные численные исследования показали, что рассматриваемая экономическая система имеет достаточные резервы увеличения темпов развития. При этом оптимальное управление, устраняя дисбаланс между факторами производства ( $k$  и  $h$ ), приводит к существенному повышению ее эффективности.

### Библиографические ссылки

1. Кетова К. В. Об одной задаче макроэкономической динамики региона с учетом факторов экономического развития // Вестник ИжГТУ. – 2007. – № 3(35). – С. 33–40.
2. Кетова К. В., Дерендяева Е. А. Изучение динамики человеческого капитала для регионов РФ в соответствии с рейтингом их социально-экономического положения // Современные проблемы науки и образования. – 2011. – № 6 [электронный ресурс]. – URL: <http://www.science-education.ru/100-5227>
3. Кетова К. В. Идентификация и прогнозирование обобщающих показателей развития региональной экономической системы // Прикладная эконометрика. – 2009. – № 3.
4. Кетова К. В., Беленький В. З. Полное аналитическое решение макромоделей развития региона при экзогенном демографическом прогнозе // Экономика и математические методы. – 2006. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 85–95.
5. Кетова К. В., Русяк И. Г. Математическое моделирование демографических показателей // Интеллектуальные системы в производстве. – 2002. – № 2. – С. 163–169.
6. Информационный сайт Госкомстата России [электронный ресурс] // Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики Российской Федерации. – URL: <http://www.gks.ru>

K. V. Ketova, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
 E. A. Derendyaeva, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Solution of Optimal Control Problem for Regional Economic System

The paper considers the algorithm of solving the problem of optimal control of a regional economic system. Results of solving the optimal control problem are given by the example of the Udmurt Republic. It is shown that optimal control eliminates the imbalance between production factors thus leading to essential increase of efficiency.

**Key words:** optimal control, human capital, economic system of the region.