УДК 519.213

И. В. Золотухин, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт океанологии им. П.П. Ширшова Российской академии наук (филиал), Санкт-Петербург

ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ МНОГОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛАПЛАСА В МОДЕЛЯХ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ ССУДОСБЕРЕГАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Предложена динамическая модель работы ссудосберегательных учреждений с двумя потоками вкладов, особенностями которой являются стохастическая зависимость входного и выходного потока денежных средств и случайность параметров интенсивностей потоков по разным типам вкладов. Показано, что k-мерные распределения денежных средств в такой модели являются двухкомпонентными многомерными распределениями Лапласа.

Ключевые слова: финансовые процессы, модель массового обслуживания, распределение Лапласа.

В современной экономике роль различных финансовых структур чрезвычайно высока. Принципы их функционирования имеют много общего: в них по некоторым правилам поступают денежные средства, а часть полученных денежных средств возвращается.

Процесс функционирования финансовой системы представляет собой совокупность нескольких процессов, при этом анализ каждого из процессов проводился обычно отдельно и независимо от других.

В ранее рассмотренных моделях (относящихся в основном к моделям страхования, например, [1, 2]) предполагалась независимость входного и выходного финансовых потоков. Это предположение не выполняется при анализе потоков денежных средств в ссудосберегающих учреждениях, таких как банки, входной и выходной потоки в которых зависимы, так как оба они определяются клиентами банка.

В настоящей работе на основе использования теории массового обслуживания построена стохастическая модель работы банка при наличии двух типов финансовых потоков, отличающихся значениями параметров. В ней предположено, что потоки вкладов представляют собой потоки Пуассона, размеры вкладов и их сроки – независимые случайные величины. Кроме того параметры интенсивности потоков вкладов также являются случайными величинами, в общем случае зависимыми между собой. Это предположение приводит к необходимости рассмотрения процесса изменения денежных средств как векторного (двумерного) процесса с зависимыми компонентами.

В работе найдена характеристическая функция процесса в k сечениях. Асимптотическое исследование k-мерных распределений привело к новому типу распределения Лапласа: двухкомпонентному многомерому распределению, введенному автором в [3]. Показано, что это распределение представляет собой дискретную смесь многомерного симметричного распределения Лапласа, введенного Андерсоном в [4], и его сверток с плотностями составляющих. Само многомерное симметричное распределение Лапласа является его частным случаем.

Заметим, что целесообразность использования распределения Лапласа вместо нормального подтверждается многочисленными современными исследованиями теоретического и прикладного характера [1, 5, 6]. Это распределение, имея более тяжелые хвосты, чем нормальное, нередко лучше согласуется и с результатами статистической обработки экономических показателей, например прибыли активов в финансовой математике [2, 7, 8].

Постановка задачи, основные предположения и результаты

Рассмотрим ссудосберегательное учрежение, например банк, в который вкладчики приносят деньги на определенный срок. Для простоты считаем, что в банке есть только 2 типа вкладов: тип 1 и тип 2. По типу j каждый i-й вкладчик вносит вклад размером $\eta_j^{(i)}$ на срок $\tau_j^{(i)}$, проценты по вкладам не учитываются. Считаем, что число вкладов каждого типа, поступивших за время t, распределено по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1 t$ и $\lambda_2 t$ соответственно, и потоки разных типов вкладов независимы. Сроки вкладов $\tau_j^{(i)}$ $(j=1,2)$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией надежности $\overline{F}_j(t)=P(\tau_j^{(i)}>t)$, $t>0$, и конечным математическим ожиданием $s_j=E\tau_j^{(i)}$. Размеры вкладов $\eta_j^{(i)}$ $(j=1,2)$ каждого типа также независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристическими функциями $\psi_j(\theta)=E\exp(i\theta\eta_j^{(i)})$, математическим ожиданиями $a_j=E\eta_j^{(i)}$, дисперсиями $D\eta_j^{(i)}=\sigma_j^2$ и конечными третьими моментами.

Далее предположим, что параметры пуассоновских потоков поступлений вкладов λ_1 и λ_2 сами случайны и зависимы между собой, при этом вектор (λ_1, λ_2) имеет двумерное экспоненциальное распределение типа Маршалла – Олкина [9] с функцией надежности

$$\overline{F}((x,y)=P(\lambda_1>x,\lambda_2>y)= \\ =\exp(-\mu_1 x-\mu_2 y-\mu_{12}\max\{x,y\}),\quad x,y>0. \qquad (1)$$

Получено 18.05.12

Использование этого распределения обусловлено тем, что оно включает в себя важные для практики крайние случаи. Именно при $\mu_{12}=0$ случайные величины λ_1 и λ_2 независимы, т. е. на каждый поток влияют свои случайные факторы; при $\mu_1=\mu_2=0$ на оба потока вляют одни и те же факторы.

Рассмотрим векторный случайный процесс:

$$U(t)=\left(U_1(t),U_2(t)\right),\ U_j(t)=\sum_{\nu=1}^{N_j(t)}\eta_j^{(\nu)}\quad (j=1,2),\quad (2)$$

где $N_j(t)$ – число вкладов j-го типа, находящихся в банке в момент времени t; $U_j(t)$ – сумма денег, находящихся на j-м типе вкладов в момент времени t.

Характеристическая функция совместного распределения значений двумерного случайного процесса $\left(U_1(t),\ U_2(t)\right)$ в моменты времени $t_1,t_2,\ldots,t_k$ есть функция $2k$ переменных:

$$\varphi_{(\overline{U}_1,\overline{U}_1)}\left(\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2\right)=E\exp\left(i\left(\overline{\theta}_1\overline{U}_1+\overline{\theta}_2\overline{U}_2\right)\right),$$

здесь обозначено:

$$\overline{U}_1=\left(U_1(t_1),\ldots,U_1(t_k)\right),$$
$$\overline{U}_2=\left(U_2(t_1),\ldots,U_2(t_k)\right),$$
$$\overline{\theta}_1=\left(\theta_1^{(1)},\ldots,\theta_1^{(k)}\right),\quad \overline{\theta}_2=\left(\theta_2^{(1)},\ldots,\theta_2^{(k)}\right).$$

Рассмотрим суммы центрированных величин:

$$\overline{\overset{\circ}{U}}_1=\left(\overset{\circ}{U}_1(t_1),\ldots,\overset{\circ}{U}_1(t_k)\right),\ \overline{\overset{\circ}{U}}_2=\left(\overset{\circ}{U}_2(t_1),\ldots,\overset{\circ}{U}_2(t_k)\right),$$

где $\overset{\circ}{U}_1(t_m)=\sum\limits_{\nu=1}^{N_1(t_m)}\overset{\circ}{\eta}_1^{(\nu)}$, $\overset{\circ}{U}_2(t_m)=\sum\limits_{\nu=1}^{N_2(t_m)}\overset{\circ}{\eta}_2^{(\nu)}$,

$\overset{\circ}{\eta}_1^{(\nu)}=\eta_1^{(\nu)}-a_1$, $\overset{\circ}{\eta}_2^{(\nu)}=\eta_2^{(\nu)}-a_2$, $m=1,\ldots,k.$

Пусть

$$\mu_1=\rho_1\mu,\ \mu_2=\rho_2\mu,\ \mu_{12}=\rho_{12}\mu,$$
$$\tilde{\overline{U}}_1=\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma_1\sqrt{s_1}}\overline{\overset{\circ}{U}}_1,\ \tilde{\overline{U}}_2=\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma_2\sqrt{s_2}}\overline{\overset{\circ}{U}}_2.\quad (3)$$

Основным результатом настоящей работы является доказательство теоремы, в которой устанавливается асимптотическое распределение $\left(\tilde{\overline{U}}_1,\tilde{\overline{U}}_2\right)$ при $\mu\to 0$ в установившемся (стационарном) режиме.

Теорема.

$$\varphi_{\left(\tilde{\overline{U}}_1,\tilde{\overline{U}}_2\right)}\left(\overline{\theta}_1,\overline{\theta}_2\right)\underset{\mu\to 0}{\to}\frac{\rho}{\rho+\frac{1}{2}\overline{\theta}_1\Sigma_1\overline{\theta}_1^T+\frac{1}{2}\overline{\theta}_2\Sigma_2\overline{\theta}_2^T}\left[\frac{\rho_{12}}{\rho}+\right.$$
$$\left.+\frac{\rho_1}{\rho}\frac{(\rho_2+\rho_{12})}{\left(\rho_2+\rho_{12}+\frac{1}{2}\overline{\theta}_2\Sigma_2\overline{\theta}_2^T\right)}+\frac{\rho_2}{\rho}\frac{(\rho_1+\rho_{12})}{\left(\rho_1+\rho_{12}+\frac{1}{2}\overline{\theta}_1\Sigma_1\overline{\theta}_1^T\right)}\right],$$

где $\rho=\rho_1+\rho_2+\rho_{12}$;

$$\Sigma_1=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_1(1) & \varepsilon_1(2) & \ldots & \varepsilon_1(k-1)\\ & 1 & \varepsilon_1(1) & \ldots & \varepsilon_1(k-2)\\ & & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & 1 & \varepsilon_1(1)\\ & & & & 1\end{pmatrix};$$

$$\Sigma_2=\begin{pmatrix}1 & \varepsilon_2(1) & \varepsilon_2(2) & \ldots & \varepsilon_2(k-1)\\ & 1 & \varepsilon_2(1) & \ldots & \varepsilon_2(k-2)\\ & & \ldots & \ldots & \ldots\\ & & & 1 & \varepsilon_2(1)\\ & & & & 1\end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_j(m)=\varepsilon_j(m\tau)=\frac{1}{s_j}\int_{m\tau}^{\infty}F_j(u)\,du\quad (j=1,\ 2).$$

Доказательство теоремы при $k=1$, т. е. в одном сечении, будет приведено в п. 3, а в п. 4 рассмотрен общий случай ($k>1$), т. е. найдено совместное распределение значений векторного процесса в k сечениях, расположенных на расстоянии τ друг от друга.

Асимптотическое распределение процесса $\left(\tilde{\overline{U}}_1,\tilde{\overline{U}}_2\right)$ в одном сечении

Работу банка можно рассматривать как работу системы массового обслуживания.

По каждому вкладу поступающий поток вкладов соответствует входящему потоку требований, сроки вкладов – длительности времени обслуживания, количество лежащих в некоторый момент вкладов – количество занятых обслуживающих устройств. Общее число обслуживающих устройств – бесконечно, поскольку каждый вклад принимается.

Как уже указывалось, работа банка рассматривается в установившемся (стационарном) режиме. В этом случае одномерные распределения числа вкладов одинаковы для всех моментов времени (по каждому типу вкладов), так что индекс t в выражении (3) можно опустить.

А. Я. Хинчин [10] показал, что в случае бесконечного числа обслуживающих устройств в установившемся режиме N_j распределены по закону Пуассона:

$$P\left(N_j=k\right)=e^{-\alpha_j}\frac{\alpha_j^k}{k!}\quad (k=0,1,2,\ldots);$$

здесь $\alpha_j=E\tau_j\lambda_j=\lambda_j s_j$ $(j=1,\ 2)$.

Рассмотрим суммы центрированных величин $\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)=\left(\sum^{N_1}\overset{\circ}{\eta}_1,\sum^{N_2}\overset{\circ}{\eta}_2\right)$, где $\overset{\circ}{\eta}_j=\eta_j-a_j$ с характеристическим функциями $\overset{\circ}{\psi}\left(\theta_j\right)=Ee^{i\overset{\circ}{\eta}_j\theta_j}$.

При фиксированных λ_1 и λ_2 потоки различных типов вкладов независимы, и характеристическая функция $\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)$ равна

$$\varphi_{\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)}\left(\theta_1,\theta_2/\lambda_1,\lambda_2\right)=$$

$$=\sum_{j_1=0}^{\infty}e^{-\lambda_1 s_1}\frac{\left(\lambda_1 s_1\right)^{j_1}}{j_1!}\overset{\circ}{\psi}{}_1^{j_1}\left(\theta_1\right)\sum_{j_2=0}^{\infty}e^{-\lambda_2 s_2}\frac{\left(\lambda_2 s_2\right)^{j_2}}{j_2!}\overset{\circ}{\psi}{}_2^{j_2}\left(\theta_2\right)=$$

$$=\exp\left(\lambda_1 S_1\left(\overset{\circ}{\psi}_1\left(\theta_1\right)-1\right)\right)\exp\left(\lambda_2 S_2\left(\overset{\circ}{\psi}_2\left(\theta_2\right)-1\right)\right).$$

Пусть теперь параметры λ_1 и λ_2 случайны и имеют совместную функцию распределения $F\left(x,y\right)$, тогда характеристическая функция безусловного распределения $\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)$ равна

$$\varphi_{\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)}\left(\theta_1,\theta_2\right)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left(\lambda_1 S_1\left(\overset{\circ}{\psi}_1\left(\theta_1\right)-1\right)\right)\times$$

$$\times\exp\left(\lambda_2 S_2\left(\overset{\circ}{\psi}_2\left(\theta_2\right)-1\right)\right)dF\left(\lambda_1,\lambda_2\right).$$

Предположим, что вектор $\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$ имеет распределение (1). В книге Барлоу и Прошан ([11], с. 152) приведено следущее выражение для моментной производящей функции двумерного экспоненциального распределения типа Маршалла – Олкина:

$$M\left(z_1,z_2\right)=\int_0^{\infty}\exp\left(-z_1x_1-z_2x_2\right)dF\left(x_1,x_2\right)=$$

$$=\frac{\left(\mu_1+\mu_{12}\right)\left(\mu_2+\mu_{12}\right)}{\left(\mu_1+\mu_{12}+z_1\right)\left(\mu_2+\mu_{12}+z_2\right)}+$$

$$+\frac{\mu_{12}z_1z_2}{\left(\nu+z_1+z_2\right)\left(\mu_1+\mu_{12}+z_1\right)\left(\mu_2+\mu_{12}+z_2\right)},\qquad(4)$$

где $\nu=\mu_1+\mu_2+\mu_{12}$.

Нетрудно видеть, что правую часть (4) можно переписать в виде

$$M\left(z_1,z_2\right)=\frac{\nu}{\left(\nu+z_1+z_2\right)}\left[\frac{\mu_{12}}{\nu}+\frac{\mu_1}{\nu}\frac{\left(\mu_2+\mu_{12}\right)}{\left(\mu_2+\mu_{12}+z_2\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_2}{\nu}\frac{\left(\mu_1+\mu_{12}\right)}{\left(\mu_1+\mu_{12}+z_1\right)}\right].\qquad(5)$$

С использованием (5) характеристическая функция $\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)$ может быть записана в виде

$$\varphi_{\left(\overset{\circ}{U}_1,\overset{\circ}{U}_2\right)}\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{\nu}{\left(\nu+s_1\left(\overset{\circ}{\psi}_1\left(\theta_1\right)-1\right)+s_2\left(\overset{\circ}{\psi}_2\left(\theta_2\right)-1\right)\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{\mu_{12}}{\nu}+\frac{\mu_1}{\nu}\frac{\left(\mu_2+\mu_{12}\right)}{\left(\mu_2+\mu_{12}+s_2\left(\overset{\circ}{\psi}_2\left(\theta_2\right)-1\right)\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu_2}{\nu}\frac{\left(\mu_1+\mu_{12}\right)}{\left(\mu_1+\mu_{12}+s_1\left(\overset{\circ}{\psi}_1\left(\theta_1\right)-1\right)\right)}\right],\qquad(6)$$

при этом характеристические функции составляющих $\overset{\circ}{U}_j$ $\left(j=1,\ 2\right)$ равны

$$\varphi_j\left(\theta_j\right)=\frac{\mu_j+\mu_{12}}{\left(\mu_j+\mu_{12}+s_j\left(\overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j\right)-1\right)\right)},\qquad(7)$$

а их моменты

$$E\overset{\circ}{U}_j=0,\ D\overset{\circ}{U}_j=\frac{s_j\sigma_j^2}{\mu_j+\mu_{12}}\ \left(j=1,2\right).$$

Рассмотрим нормированный вектор $\left(\tilde{U}_1,\tilde{U}_2\right)=\left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma_1\sqrt{s_1}}\overset{\circ}{U}_1,\frac{\sqrt{\mu}}{\sigma_2\sqrt{s_2}}\overset{\circ}{U}_2\right)$ и его характеристическую функцию $\varphi_{(\tilde{U}_1,\tilde{U}_2)}(\theta_1,\theta_2)$.⊕

В выражении для характеристической функции $\varphi_{(\tilde{U}_1,\tilde{U}_2)}\left(\theta_1,\theta_2\right)$ разложим функции $\overset{\circ}{\psi}_j\left(\frac{\theta_j\sqrt{\mu}}{\sigma_j\sqrt{s_j}}\right)$ $\left(j=1,2\right)$ в ряд до второго члена включительно и устремим μ к нулю. Тогда, учитывая (3), получим предельную характеристическую функцию вида

$$\varphi\left(\theta_1,\theta_2\right)=\frac{\rho}{\left(\rho+\frac{\theta_1^2}{2}+\frac{\theta_2^2}{2}\right)}\times$$

$$\times\left[\frac{\rho_{12}}{\rho}+\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\left(\rho_2+\rho_{12}\right)}{\left(\rho_2+\rho_{12}+\frac{\theta_2^2}{2}\right)}+\frac{\rho_2}{\rho}\frac{\left(\rho_1+\rho_{12}\right)}{\left(\rho_1+\rho_{12}+\frac{\theta_1^2}{2}\right)}\right].\qquad(8)$$

Из (8) следует, что одномерные характеристические функции составляющих

$$\varphi_j(\theta_j)=\frac{\rho_j+\rho_{12}}{\rho_j+\rho_{12}+\frac{\theta_j^2}{2}}\ \left(j=1,2\right)$$

являются характеристическими функциями распределения Лапласа с плотностью

$$f_j\left(x_j\right)=\frac{\rho_j+\rho_{12}}{\sqrt{2}}\exp\left(-\sqrt{2}(\rho_j+\rho_{12})|\,x_j\,|\right)$$

$$\left(-\infty<x_j<\infty\right).\qquad(9)$$

Обобщенное двумерное распределение Лапласа с характеристической функцией (8) было введено и исследовано в [12].

В частности, при $\rho_1 = \rho_2 = 0$

$$\varphi_j\left(\theta_j\right) = \frac{\rho_{12}}{\rho_{12} + \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2}}$$

представляет собой частный случай многомерного симметричного распределения Лапласа [4].

Само же распределение, как следует из выражения (6), представляет дискретную смесь трех распределений: с вероятностью $p_3 = \frac{\rho_{12}}{\rho}$ – это двумерное симметричное распределение Лапласа с параметром ρ, с вероятностями $p_j = \frac{\rho_j}{\rho}$ $\left(j = 1, 2\right)$ – свертки этого распределения с одномерными составляющими с плотностями (9).

Асимптотическое распределение процесса $\left(U_1\left(t\right),\ U_2\left(t\right)\right)$ в *k* сечениях

Для определения величины устойчивых пассивов за некоторый промежуток времени необходимо рассматривать $\left(U_1\left(t\right),\ U_2\left(t\right)\right)$ как векторный случайный процесс. Каждый случайный процесс характеризуется своими k-мерными распределениями в сечениях $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$. Для простоты изложения положим $k = 2$. Поскольку мы рассматриваем процесс в установившемся стационарном режиме, закон распределения в сечениях t_1 и t_2 зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

При фиксированном λ для одного потока вкладов характеристическая функция процесса $U\left(t\right)$ в двух сечениях t и $t+\tau$ в установившемся режиме равна

$$\varphi\left(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}\right) = \exp\left(-\lambda s g\left(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}\right)\right),$$

где

$$g\left(\theta^{(1)}, \theta^{(2)}\right) = 2 - \psi\left(\theta^{(1)}\right) - \psi\left(\theta^{(2)}\right) +$$
$$+ \varepsilon\left(\tau\right)\left(\psi\left(\theta^{(1)}\right) + \psi\left(\theta^{(2)}\right) - \psi\left(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}\right)\right),$$
$$\varepsilon\left(\tau\right) = \frac{1}{s}\int_{\tau}^{\infty} F\left(u\right) du.$$

Обозначим через $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right)$ значения двумерного процесса в первом сечении, а через $\left(U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right)$ – во втором.

Нетрудно понять, что безусловная характеристическая функция $\varphi\left(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}; \theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)}\right)$ сумм вкладов 1-го и 2-го типов в двух сечениях $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)};\ U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right)$ получается, если в формуле (6) заменить функцию $\overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j\right)$ на функцию

$$g_j\left(\theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)}\right) = 2 - \overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j^{(1)}\right) - \overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j^{(2)}\right) +$$
$$+ \varepsilon_j\left(\tau\right)\left(\overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j^{(1)}\right) + \overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j^{(2)}\right) - \overset{\circ}{\psi}_j\left(\theta_j^{(1)} + \theta_j^{(2)}\right)\right),$$

где $\varepsilon_j\left(\tau\right) = \frac{1}{s_j}\int_{\tau}^{\infty} F_j\left(u\right) du$ $\left(j = 1,\ 2\right)$.

Рассматривая стандартизированные величины

$$\tilde{U}_j^{(1)} = \frac{\overset{\circ}{U}{}_j^{(1)}\sqrt{\mu}}{\sigma_j\sqrt{s_j}},\ \tilde{U}_j^{(2)} = \frac{\overset{\circ}{U}{}_j^{(2)}\sqrt{\mu}}{\sigma_j\sqrt{s_j}}\ \left(j = 1, 2\right)$$

и раскладывая по-прежнему в выражении для характеристической функции $\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)};\ U_1^{(2)}, U_2^{(2)}\right)$ функции $\overset{\circ}{\psi}_j$ в ряды до второго члена включительно, найдем, опуская громоздкие выкладки, что при $\mu \to 0$

$$\varphi\left(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2\right) = \frac{\rho}{\rho + \frac{1}{2}\bar{\theta}_1\Sigma_1\bar{\theta}_1^T + \frac{1}{2}\bar{\theta}_2\Sigma_2\bar{\theta}_2^T} \times$$
$$\times\left[\frac{\rho_{12}}{\rho} + \frac{\rho_1}{\rho}\frac{\left(\rho_2 + \rho_{12}\right)}{\left(\rho_2 + \rho_{12} + \frac{1}{2}\bar{\theta}_2\Sigma_2\bar{\theta}_2^T\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho_2}{\rho}\frac{\left(\rho_1 + \rho_{12}\right)}{\left(\rho_1 + \rho_{12} + \frac{1}{2}\bar{\theta}_1\Sigma_1\bar{\theta}_1^T\right)}\right], \tag{10}$$

где обозначено

$$\bar{\theta}_j = \left(\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}\right),\ \Sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_j\left(\tau\right) \\ \varepsilon_j\left(\tau\right) & 1 \end{pmatrix}\ \left(j = 1, 2\right).$$

В случае k сечений, расположенных на расстоянии τ друг от друга, характеристическая функция $\varphi\left(\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(k)}\right)$ для одного потока вкладов также получена в [13] при постоянном λ.

Поступая аналогично случаю $k = 2$, т. е. раскладывая в выражении для характеристической функции $\overset{\circ}{\psi}_j$ в ряды до второго члена включительно, можно показать, что при случайных параметрах λ_1 и λ_2 в случае двух типов вкладов характеристическая функция для стандартизированных величин при $\mu \to 0$ по-прежнему задается формулой (10) при

$$\bar{\theta}_j = (\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \ldots, \theta_k^{(j)}),$$

$$\Sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_j\left(\tau\right) & \varepsilon_j\left(2\tau\right) & \ldots & \varepsilon_j\left(\left(k-1\right)\tau\right) \\ & 1 & \varepsilon_j\left(\tau\right) & \ldots & \varepsilon_j\left(\left(k-2\right)\tau\right) \\ & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при $\mu \to 0$ процесс $\left(\tilde{U}_1(t), \tilde{U}_2(t)\right)$ в установившемся режиме слабо сходится к векторному процессу, 2*k*-мерные распределения которых представляют собой двухкомпонентное многомерное распределение Лапласа, изученное в [9].

Библиографические ссылки

1. *Королев В. Ю.*, *Бенинг В. Е.*, *Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. – М. : Физматлит, 2007.
2. *Rachev S. T.*, *Mittnik S.* Stable Paretian Models in Finance. – Wiley : Chichester, 2000.
3. *Золотухин И. В.* Двухкомпонентное многомерное распределение Лапласа // Вестник НовГУ. – Серия «Технические науки». – 2012. – 9 с.
4. *Anderson D. N.* A multivariate Linnik distribution // Statist. Probab. Lett. – 1992. – No. 14. – P. 333–336.
5. *Madan D. B.*, *Seneta E.* The variance gamma (V. G.) for share markets returns // J. Business. – 1990. – No. 63. – P. 511–524.
6. *Madan D. B.*, *Carr P. P.*, *Chang E. C.* The variance gamma process and option pricing // European Finance Rev. – 1998. – No. 2. – P. 79–105.
7. *Kotz S.*, *Kotzubowski T.*, *Podgorski K.* The Laplace distribution and generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering and Finance. – Birkhauser : Boston, 2001.
8. *Meerschaert M. M.*, *Scheffler H. P.* Portfolio modelling with heavy tailed random vectors // in Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance ; S.T. Rachev (Ed.). – Elsevier Science : Amsterdam. – P. 595–640.
9. *Marshall A. W.*, *Olkin I.* A multivariate exponential distribution // J. Amer. Statist. Assoc. – 1967. – No. 62. – P. 30–44.
10. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. – М. : Физматлит, 1963.
11. *Барлоу Р.*, *Прошан Ф.* Статистическая теория надежности и испытания на безотказность. – М. : Наука, 1984. – 327 с.
12. *Zolotukhin I. V.*, *Zolotukhina L. A.* New Class of Multivariate Generalized Laplace distribution // Transactions of XXIV International Seminar of Stability Problems for Stochastic Models, Latvia, 2004. – P. 267–268.
13. *Савинов Г. В.*, *Золотухин И. В.* Анализ устойчивости финансовых систем // Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. – 2011. – № 6(72). – С. 6–12.

I. V. Zolotukhin, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, St.-Petersburg Department of P.P. Shirshov Institute of Oceanology

Two-Component Multivariate Laplace Distribution in Models of Financial Flows for Savings and Loan Institutions

The dynamic model of savings and loan institutions with two streams of deposits is proposed. The features of the model are the stochastic dependence of the input and output cash flows and randomness of cash flow parameters for various types of deposits. It is proved that k-dimensional distributions of funds in this model are two-component multivariate Laplace distributions.

Key words: financial processes, model of queuing theory, Laplace distribution.