

УДК 621.391

О. В. Пономарева, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В. А. Алексеев, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

А. В. Пономарев, кандидат экономических наук, Центральная избирательная комиссия Удмуртской Республики, Ижевск

ЦИФРОВОЙ ПЕРИОДОГРАММ-АНАЛИЗ И ПРОБЛЕМЫ ЕГО ПРАКТИЧЕСКОГО ПРИМЕНЕНИЯ*

Рассмотрен метод цифрового периодограмм-анализа, исследованы характерные эффекты, возникающие при его применении на практике. Предложены пути решения таких проблем классического периодограмм-анализа, как паразитная амплитудная модуляция спектра, оценивание аperiodических корреляционных функций, повышение статистической точности оценок характеристик случайных сигналов.

Ключевые слова: дискретный стационарный случайный сигнал, цифровой периодограмм-анализ, параметрическое дискретное преобразование Фурье, энергетический спектр, аperiodическая корреляционная функция, паразитная амплитудная модуляция спектра, характеристики случайных сигналов.

В настоящее время метод цифрового периодограмм-анализа находит самое широкое применение при обработке сигналов в различных областях научных исследований [1–7]. Действительно, на практике часто приходится сталкиваться с задачами обнаружения и измерения параметров отдельных тональных компонентов в шуме (задачи анализа случайных процессов со скрытыми периодичностями) [8]. Например, в пассивной гидролокации при обнаружении и классификации кораблей главным образом используется структура тональных компонентов (тональные компоненты в спектрах возникают за счет работы механизмов судна) [9]. При виброакустической диагностике машин используется тот факт, что акустические сигналы машин и механизмов характеризуются наличием гармонических рядов разнообразной природы. Так, в вибрационном или шумовом сигнале редуктора можно выделить ряды из гармоник оборотной, зубцовой и модуляционных частот [10].

Остановимся кратко на таком важном моменте, как выбор оценок для измерения характеристик стационарного (в широком смысле) случайного сигнала (ДСС сигнала) $X(t)$, заданного на конечном интервале $(0, T)$. На практике, благодаря работам по статистике, широкое распространение получили следующие оценки:

- для математического ожидания M_X :

$$M_{x,T} = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt; \quad (1)$$

- для корреляционной функции $K_X(\tau)$:

$$K_{x,T}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|\tau|} [X(t) - M_{x,T}] \times \\ \times [X(t+|\tau|) - M_{x,T}] dt; & 0 \leq |\tau| \leq T \\ 0; & |\tau| > T \end{cases} \quad (2)$$

или

$$K_{x,T}^1(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{T-|\tau|} \int_0^{T-|\tau|} [X(t) - M_{x,T}] \times \\ \times [X(t+|\tau|) - M_{x,T}] dt; & 0 \leq |\tau| \leq T \\ 0; & |\tau| > T \end{cases} \quad (3)$$

- для дисперсии D_X :

$$D_{x,T} = K_{x,T}(0);$$

- для энергетического спектра $G_X(f)$:

$$G_{x,T}(f) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} X(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2; \quad -\infty \leq f \leq \infty. \quad (4)$$

Сделаем два замечания по рассмотренным оценкам.

Во-первых, эти оценки выбраны интуитивно и не являются оптимальными в смысле какого-нибудь критерия.

Во-вторых, известно, что оценки $K_{x,T}(\tau)$ (2) и $K_{x,T}^1(\tau)$ (3) обладают свойством *эргодичности* (свойство, при котором среднее по времени равно среднему по ансамблю). Математическое ожидание оценок: $M_{x,T}$ равно M , $K_{x,T}(\tau)$ и $K_{x,T}^1(\tau)$ равно $K_X(\tau)$, а их дисперсии пропорциональны $1/T$. Оценка $G_{x,T}(f)$ свойством эргодичности не обладает.

Отметим, что ошибочное утверждение «если оценка обладает эргодическим свойством, то и ее фурье-преобразование обладает этим свойством» было источником многих заблуждений в спектральном анализе случайных сигналов.

А. Шустер (1898) [9] предложил для дискретного случая следующую оценку $G_{x,T}(f)$:

$$G_{x,N}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{kn} \right|^2, \quad (5)$$

где $W_N = \exp(-j2\pi/N)$; $k = 0, N-1$.

Он, назвав ее *периодограммой*, указывал на необходимость усреднения оценок $G_{X,N}(k)$, признавая при этом сложность реализации этой процедуры имеющимися в то время средствами вычислительной техники. Игнорирование необходимости усреднения оценок $G_{X,N}(k)$, возможно, из-за отсутствия на тот момент глубоких теоретических исследований процедур сглаживания $G_{X,T}(f)$ (такие исследования впоследствии были проведены Н. Винером) и быстрых алгоритмов вычисления *периодограммы*, привело к двум последствиям:

- потере интереса к периодограмм-анализу Шустера, и он (как сейчас выясняется – незаслуженно) был забыт более чем на полвека;

- появлению иных методов спектрального анализа, так называемых параметрических (регрессионных) методов спектрального анализа, основу которых заложил Юл. Суть этих методов заключается в аппроксимации эмпирических значений корреляционных функций (или энергетических спектров) несложными аналитическими выражениями. Справедливости ради необходимо отметить, что задолго до Юла «подгонкой» данных занимался Прони [9].

Не отрицая результатов, достигнутых в данном направлении при оценивании спектральных характеристик случайных процессов, необходимо отметить существенный недостаток этих методов – **значительную их субъективность**. Эффективное применение параметрических методов спектрального анализа возможно лишь тогда, когда нам априори известны значения (или по крайней мере характеристики) энергетического спектра.

Именно поэтому авторы, руководствуясь тезисом, что «**данные должны говорить сами за себя**», не рассматривают этот вид спектрального оценивания в дальнейшем изложении.

Дадим дискретные аналоги «аксиом измерений», заданных соотношениями (1)–(4) для дискретного случайного сигнала $X(n)$, заданного на интервале $(\overline{0, N-1})$, т. е. $n = \overline{0, N-1}$:

- для математического ожидания M_X :

$$M_{X,N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n); \quad (6)$$

- для корреляционной функции $K_X(r)$:

$$K_{X,N}(r) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|r|} [X(n) - M_{X,N}] \times \\ \times [X(n+|r|) - M_{X,N}]; & 0 \leq |r| \leq N-1 \\ 0; & |r| > N-1 \end{cases} \quad (7)$$

или

$$K_{X,N}^1(r) = \begin{cases} \frac{1}{N-|r|} \sum_{n=0}^{N-|r|} [X(n) - M_{X,N}] \times \\ \times [X(n+|r|) - M_{X,N}]; & 0 \leq |r| \leq N-1; \\ 0; & |r| > N-1; \end{cases} \quad (8)$$

- для дисперсии D_X :

$$D_{X,N} = \frac{N}{N-1} K_{X,N}(0);$$

- для энергетического спектра $G_X(k)$:

$$G_{X,N}(k) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{kn} \right|^2, \quad (9)$$

где $W_N = \exp(-j2\pi/N)$; $k = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим определение оценки корреляционной функции дискретного стационарного (в широком смысле) случайного сигнала (ДСС сигнала) с позиций дискретного линейного преобразования.

В общем виде это преобразование можно представить в векторно-матричной форме:

$$Y_N = \Phi B_N X_N, \quad (10)$$

где X_N – дискретный сигнал на входе системы; Y_N – дискретный сигнал на выходе системы; B_N – матрица, определяющая оператор системы; Φ – нормирующий множитель.

Пусть задана реализация $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, ДСС сигнала $X(h)$ в виде вектора N -мерного линейного пространства $X_N = [(x_0, x_1, \dots, x_{N-1})]^T$; T – знак транспонирования. Если в качестве оператора рассмотреть матрицу сдвигов исходного сигнала X_N , которая в случае применения ДПФ является циркулянтной матрицей и имеет вид [1–5]

$$C_N = \begin{matrix} & & 0 & 1 & \dots & \dots & (N-1) \\ 0 & \left[\begin{array}{cccccc} x(0) & x(1) & & & & x(N-1) \\ x(N-1) & x(0) & & & & x(N-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (N-1) & x(1) & x(2) & \dots & \dots & x(0) \end{array} \right. & & & & & & \end{matrix} \quad (11)$$

а нормирующий множитель определить равным $1/N$, то мы придем к оценке:

$$G_{X,N}(k) = \sum_{r=0}^{N-1} \{ [K_{X,N}(r) + K_{X,N}(N-r)] \} W^{kr}. \quad (12)$$

Таким образом, оценка энергетического спектра, полученная с помощью ДПФ, не является преобразованием оценки аperiodической корреляционной функции (7), а преобразованием некой новой оценки корреляционной функции, получившей название циклической:

$$K_{X,N}^{\text{цикл}} = K_{X,N}(r) + K_{X,N}(N-r); \quad r = \overline{0, N-1}. \quad (13)$$

В рамках векторно-матричного подхода становится очевидным метод получения оценки (*тоже циклической!*) корреляционной функции, совпадающей на интервале анализа с оценкой аperiodической

корреляционной функции (9). Для этого необходимо реализацию $x(n)$, $n = 0, N-1$, ДСС сигнала $X(h)$ дополнить N (как минимум) нулями $x^{доп}(n) = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N)$, $n = 0, 2N-1$, которую

можно представить в виде вектора $2N$ -мерного линейного пространства

$$X_{2N}^{доп} = [(x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_N)]^T.$$

Матрица сдвигов сигнала $X_{2N}^{доп}$ является также циркулянтной матрицей и имеет вид

$$C_N^{доп} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N-1) & N & (N+1) & \dots & (2N-1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \\ N \\ (N+1) \\ \dots \\ (2N-1) \end{matrix} & \left| \begin{array}{cccccccc} x(0) & x(1) & \dots & x(N-1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x(0) & \dots & x(N-2) & x(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x(0) & x(1) & x(2) & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x(0) & x(1) & \dots & 0 \\ x(N-1) & 0 & \dots & 0 & 0 & x(0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x(1) & x(2) & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & x(0) \end{array} \right| & \end{matrix} \quad (14)$$

Оценка, получаемая с помощью выражения (10), на интервале $r = 0, N-1$ совпадает с (7):

$$K_{x,2N}^{цикл,доп} = K_{x,N}(r); \quad r = 0, N-1. \quad (13)$$

Анализируя полученные соотношения, приходим к важному выводу: циклическая корреляционная функция $K_{x,N}^{цикл}$ (13) является результатом наложения в корреляционной области циклических корреляционных функций вида $K_{x,N}(r)$ (13) из-за дискретизации энергетического спектра с частотой в два раза меньшей, чем требуется при каноническом разложении Пугачева [1].

В заключение отметим, что метод дополнения нулями позволяет не только повысить частоту дискретизации энергетического спектра, но также и эффективно бороться с паразитной амплитудной модуляцией спектра (за счет увеличения числа фильтров). Недостаток метода – существенное увеличение вычислительных затрат и требуемого объема памяти. В [1–7] разработано параметрическое ДПФ, которое позволяет решить возникающие при этом проблемы.

Библиографические ссылки

1. Пономарева О. В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных

функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7–12.

2. Пономарева О. В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. – 2010. – № 2(16). – С. 36–41.

3. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011 – № 1. – С. 2–6.

4. Пономарева О. В. Быстрое параметрическое дискретное преобразование Фурье действительных последовательностей // Цифровая обработка сигналов. – 2012 – № 2. – С. 2–5.

5. Пономарева О. В., Пономарев А. В., Пономарева Н. В. Скользящее параметрическое ДПФ в задачах обнаружения тональных компонент // Цифровая обработка сигналов. – 2012. – № 4. – С. 2–7.

6. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – АН СССР, 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561–1570.

7. Пономарев В. А., Пономарева О. В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автотметрия. – СО АН СССР, 1983. – № 4. – С. 39–45.

8. Серебрянников М. Г. Первозванский А. А. Выявление скрытых периодичностей. – М. : Наука, 1965. – 244 с.

9. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. – М. : Мир, 1980.

10. Неразрушающий контроль : справочник : в 8 т./ под общ. ред. В. В. Клюева. – М. : Машиностроение, 2007. – 829 с.

O.V. Ponomareva, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
V. A. Alekseev, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University.
A. V. Ponomarev, PhD in Economics, Central Election Commission of Udmurt Republic

This paper presents a method of digital periodogram analysis; the characteristic effects arising within its practical application are examined. Solution is proposed to such problems of the classical periodogram analysis as the parasitic amplitude modulation of spectrum, estimation of non-periodic correlation functions, increasing the statistical accuracy of estimating the random signals characteristics.

Key words: discrete stationary random signal, digital periodogram analysis, parametric discrete Fourier transform, energy spectrum, non-periodic correlation function, parasitic amplitude modulation of spectrum, characteristics of random signals.

УДК 517.958.52/59

Ю. В. Ганзий, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЭРОБАЛЛИСТИКИ СТРЕЛ

Работа посвящена определению аэробаллистических параметров стрелы. Произведено сравнение расчета, выполненного в ANSYS CFX, и данных натурального эксперимента.

Ключевые слова: стрела, коэффициент лобового сопротивления, аэробаллистика, дозвуковая аэродинамика.

Методика комплексной исторической реконструкции стрел по археологическим данным показала свою высокую эффективность при решении ряда прикладных задач [1].

Так как надежные аналитические методики расчета коэффициента аэродинамического сопротивления c_x на дозвуковых скоростях отсутствуют, выполнено моделирование полета стрелы, двигающейся в дозвуковом потоке, в программной системе конечно-элементного анализа *ANSYS CFX*. В проведенном экспериментально-расчетном исследовании осуществлена идентификация параметров по баллистическим параметрам.

В качестве расчетной модели принята стрела типа *Predator 2* фирмы *Carbon express*, внешний вид которой приведен на рис. 1.

Параметры стрелы: калибр 7,57 мм; масса стрелы 334 гран, наконечника – 100 гран. Таким образом, масса стрелы в сборе составляет 434 гран, или 26,99 г.

Условия, при которых проведен расчет: $t = 25^\circ\text{C}$, плотность воздуха $\rho = 1,185 \text{ кг/м}^3$, динамическая вязкость воздуха $\mu = 18,27 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$.

Аэродинамический расчет в *ANSYS CFX* проводился в диапазоне скоростей $v = 10 \dots 80 \text{ м/с}$, для которых замерялась сила аэродинамического сопротивления (табл. 1).

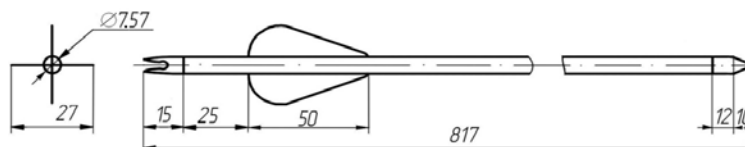


Рис. 1. Стрела типа Predator 2

Таблица 1. Результаты расчетов аэродинамики стрелы

v , м/с	10,00	20,00	30,00	40,00	50,00	60,00	70,00	80,00
R , Н	0,00362	0,01231	0,02579	0,04403	0,06655	0,09347	0,12414	0,15946

Для экспериментального подтверждения результатов моделирования в *ANSYS CFX* изготовлен лук. При проведении натуральных экспериментов из лука точность замера угла возвышения θ_0 составляла $1 \dots 3^\circ$, что определило разброс дальности полета стрелы в экспериментах (табл. 2) [3].

Таблица 2. Соответствие случайной погрешности в измерении дальности полета стрелы и чувствительности к углу возвышения θ_0

Опыт	Дальность полета S , м	Чувствительность к углу возвышения, м
Серия № 1	29 ± 4	$24,5 \dots 31,3$
Серия № 2	44 ± 4	$31,5 \dots 41,0$

В серии экспериментов № 1 чувствительность дальности к углу возвышения $\frac{\partial S}{\partial \theta_0}$ составила $3,57 \text{ м/град}$. В серии экспериментов № 2 – $4,55 \text{ м/град}$. Отсюда следует, что все стандартные отклонения в измерении дальности полета стрелы в натурном эксперименте объясняются точностью выдерживания θ_0 (табл. 2), а расчетная зависимость силы аэродинамического сопротивления стрелы от скорости совпадает с серединой диапазона экспериментально определенного значения этой силы (см. рис. 2).