МАТЕМАТИКА

УДК 512.536

Д. В. Сергеева, Вологодский институт права и экономики ФСИН России

О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ *n*-АРНЫХ ПОЛУГРУППАХ С СОКРАЩЕНИЯМИ

Наличие инвариантной меры на топологических группах и полугруппах играет существенную роль в построении гармонического анализа на подобных объектах. Аналогичная ситуация прослеживается и для топологических n-арных групп и n-арных полугрупп. В данной работе дано необходимое и достаточное условие существования инвариантной меры на топологических абелевых n-арных полугруппах с сокращениями.

Ключевые слова: топологическая *n*-арная полугруппа, *n*-арная полугруппа с сокращениями, инвариантная мера.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ обозначаем a_1^n, а результат действия *n*-арной операции $(\ )$ на такой последовательности – через (a_1^n) или $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Терминология, касающаяся *n*-арных полугрупп соответствует работе [1]. Абелеву *n*-арную полугруппу называют *n*-арной полугруппой с сокращениями, если отображение $x \mapsto (a_1^{n-1}x)$ $(x \in X)$ инъективно для каждой последовательности $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$. *n*-арную полугруппу $\langle X, (\ ), \tau \rangle$, наделенную топологией τ, называют топологической, если *n*-арная операция $(\ )$ непрерывна по совокупности аргументов. *n*-арную группу $\langle X, (\ ), \tau \rangle$ называют топологической, если она является топологической *n*-арной полугруппой и решение x каждого из уравнений $(xa_1^{n-1}) = a$ и $(a_1^{n-1}x) = a$ непрерывно зависит от $a_1^{n-1}a \in X^n$. Ниже, не оговаривая особо, мы предполагаем, что все рассматриваемые топологии хаусдорфовы.

Инвариантной мерой на топологической абелевой *n*-арной полугруппе $\langle X, (\ ), \tau \rangle$ мы называем счетно-аддитивную неотрицательную функцию μ, определенную на наименьшем σ-кольце В подмножеств X, содержащем семейство $K(X)$ всех компактных подмножеств множества X, конечную на каждом компактном множестве, такую что $\mu(B) = \sup\{\mu(C) \mid C \subset B, C \in K(X)\}$ для любого $B \in$ В и $\mu([a_1^{n-1}B]) = \mu(B)$ для любых a_1^{n-1} и $B \in$ В, таких что множество $[a_1^{n-1}B] = \{(a_1^{n-1}b) \mid b \in B\}$ принадлежит В.

Пусть $\langle X, (\ ), \tau \rangle$ – топологическая абелева *n*-арная полугруппа с сокращениями. Существует *n*-арная группа $\langle G, (\ ) \rangle$ и инъективное отображение $\varphi: X \to G$, такое что $\varphi(a_1^n) = (\varphi(a_1)\,\varphi(a_2)\ldots\varphi(a_n))$. Не ограничивая общности, предполагаем, что множество $\varphi(X)$ является системой образующих для G.

Теорема 1. Ненулевая инвариантная мера на топологической абелевой *n*-арной полугруппе $\langle X, (\ ), \tau \rangle$ с сокращениями существует тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности $a_1^{n-2} \in X^{n-2}$ существует ненулевая мера μ на $\langle X, (\ ), \tau \rangle$, такая что для любого $x \in X$ и любого борелевского множества $B \subset X$ выполняется равенство $\mu[xa_1^{n-2}B] = \mu(B)$.

Доказательство. Так как отображение $x \to (a_1^{n-1}x)$ из X в X непрерывно и инъективно, то множество $[a_1^{n-1}B]$ является борелевским подмножеством X для любого борелевского множества $B \subset X$ и любой последовательности $a_1^{n-1} \in X^{n-1}$.

Рассмотрим бинарные операции $*$ и $\circ$, соответственно, на множествах X и G, определяемые соотношениями

$$x * y = (xa_1^{n-2}y)\ (x, y \in X) \text{ и}$$

$$a \circ b = (a \cdot \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(a_{n-2}) \cdot b)\ (a, b \in G).$$

Легко проверяется, что $\langle X, * \rangle$ является бинарной абелевой полугруппой с сокращениями, а $\langle G, \circ \rangle$ – бинарной абелевой группой, причем $\varphi(X)$ является системой образующих $\langle G, \circ \rangle$.

Получено 05.03.13

Из равенств

$$\varphi(x * y)=\varphi\left(\left(x a_{1}^{n-2} y\right)\right)=$$
$$=\left(\varphi(x) \varphi\left(a_{1}\right) \varphi\left(a_{2}\right) \ldots \varphi\left(a_{n-2}\right) \varphi(y)\right)=\varphi(x) \circ \varphi(y)$$

следует, что φ является гомоморфизмом из $\langle X, *\rangle$ в $\langle G, \circ\rangle$.

Доказывается, что $\langle X, *, \tau\rangle$ будет топологической бинарной группой. Пусть μ − ненулевая инвариантная мера на $\langle X,(\ ), \tau\rangle$. Тогда из определения инвариантности этой меры имеем $\mu\left(\left[x a_{1}^{n-2} B\right]\right)=\mu(B)$ для любого $B \in \mathrm{B}$ и любой последовательности $x a_{1}^{n-2} \in X^{n-1}$.

Пусть далее ненулевая борелевская мера μ на $\langle X,(\ ), \tau\rangle$ удовлетворяет условию

$$\mu\left(\left[x a_{1}^{n-2} B\right]\right)=\mu(B)$$

для любого $x \in X$, любого $B \in \mathrm{B}$ и для данной последовательности $a_{1}^{n-2} \in X^{n-2}$. Так как $\left[x a_{1}^{n-2} B\right]=\left\{\left(x a_{1}^{n-2} b\right) \mid b \in B\right\}=\{x * b \mid b \in B\}=x * B$, то μ будет ненулевой инвариантной борелевской мерой на $\langle X, *, \tau\rangle$.

Из теоремы 4.8 работы [2] непосредственно следует, что на $\langle G, \circ\rangle$ существует локально компактная топология τ_{G}, такая что $\left\langle G, \circ, \tau_{G}\right\rangle$ является топологической группой, $\langle X, *, \tau\rangle$ имеет открытый идеал X_{1} с открытыми сдвигами на элементы X и для каждого такого идеала X_{1} сужение φ на X_{1} является гомеоморфным отображением X_{1} на открытую подполугруппу $\varphi\left(X_{1}\right)$ топологической группы $\left\langle G, \circ, \tau_{G}\right\rangle$, где на X_{1} рассматривается сужение топологии τ, а на $\varphi\left(X_{1}\right)$ сужение топологии τ_{G}, кроме того, φ − непрерывное отображение из $\langle X, \tau\rangle$ в $\left\langle G, \tau_{G}\right\rangle$. Доказывается, что $\left\langle G,(\ ), \tau_{G}\right\rangle$ будет топологической n-арной группой. Из замечания к теореме 1 работы [3] следует, что на $\left\langle G,(\ ), \tau_{G}\right\rangle$ существует ненулевая инвариантная мера μ.

Для любого борелевского множества $B \subset X$ положим $\lambda(B)=\mu(\varphi(B))$. Так как φ − непрерывное и инъективное отображение, то $\varphi(B)$ будет борелевским подмножеством X. Из непрерывности и инъективности φ вытекает, что λ будет борелевской мерой на $\langle X, \tau\rangle$. Ее нетривиальность следует из того, что для непустого компактного множества $B \subset X_{1}$, имеющего непустую внутренность, образ $\varphi\left(X_{1}\right)$ будет компактным подмножеством $\left\langle G, \tau_{G}\right\rangle$, внутренность которого не пуста, и, следовательно, $\lambda(B)=\mu(\varphi(B))>0$.

Инвариантность меры λ следует из равенств $\lambda\left[x_{1}^{n-1} B\right]=\mu\left(\varphi\left[x_{1}^{n-1} B\right]\right)=\mu(B)$, так как

$$\varphi\left[x_{1}^{n-1} B\right]=\left\{\varphi\left(x_{1}^{n-1} b\right) \mid b \in B\right\}=$$
$$=\left\{\left(\varphi\left(x_{1}\right) \ldots \varphi\left(x_{n-1}\right) \varphi(b)\right) \mid b \in B\right\}=$$
$$=\left[\varphi\left(x_{1}\right) \ldots \varphi\left(x_{n-1}\right) B\right].$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Ненулевая инвариантная мера на топологической абелевой n-арной полугруппе $\langle X,(\ ), \tau\rangle$ с сокращениями существует тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности $a_{1}^{n-2} \in X^{n-2}$ бинарная топологическая полугруппа $\langle X, *, \tau\rangle$ имеет открытый идеал X_{1} с открытыми сдвигами на элементы полугруппы $\langle X, *, \tau\rangle$, где $x * y=\left(x a_{1}^{n-2} y\right)$ и на X_{1} существует семейство непрерывных инвариантных отклонений, отделяющее точки X_{1}.

Теорема 3. Любые две ненулевые инвариантные меры на топологической абелевой n-арной полугруппе $\langle X,(\ ), \tau\rangle$ с сокращениями пропорциональны.

Библиографические ссылки

1. *Мухин В. В.*, *Сергеева Д. В.* Характеры абелевых n-арных полугрупп, обладающих нейтральной последовательностью // Вестник ИжГТУ. – 2010. – № 4. – С. 156–158.

2. *Mukhin V. V.* Invariant Measures on Topological Semigroups which have an Ideal wich Open Translation Mappings // Semigroup Forum. – 2001. – Vol. 62. – P. 159–172.

3. *Мухин В. В.* Инвариантные меры на топологических n-полугруппах // Весцi нацыянальной акадэмii навук Беларусi. Серыя фiз-матем. навук. – 2000. – № 4. – С. 16–21.

D. V. Sergeeva, Vologda Institute of Law and Economics of the Federal Penal Service

About Existence of Invariant Measures on Topological Abelians n-ary Semigroups with Reductions

Existence of an invariant measure on topological groups and semigroups plays an essential role in creation of the harmonious analysis on similar objects. The similar situation is traced for topological n-ary groups and n-ary semigroups. In this work the necessary and sufficient condition of existence of an invariant measure on topological Abelian n-ary semigroups with reductions is given.

Key words: topological n-ary semigroup, n-ary semigroup with reductions, invariant measure.