

УДК 539.319

М. А. Осипенко, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

## О ТОЧНОСТИ МОДЕЛИ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА В КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ БАЛОК

На основе модели Бернулли – Эйлера построено аналитическое решение контактной задачи об изгибе двух одинаковых балок с зазором. Проведено сравнение этого решения с численным решением, полученным без приближений указанной модели. Найдено хорошее совпадение численных и аналитических значений напряжений и контактных расстояний. Аналитически найденная контактная нагрузка содержит сосредоточенную силу и конечный скачок и представляет собой правильную «схему» численно найденной нагрузки. Сделан вывод о корректности и приемлемой точности модели Бернулли – Эйлера.

**Ключевые слова:** балка, изгиб, модель Бернулли – Эйлера, контактная задача, аналитическое решение, численное решение.

Модель Бернулли – Эйлера является простейшей моделью изгиба балки [1] и широко используется при постановке и решении контактных задач для балок [2–9]. Обычно удается получить аналитические решения, что облегчает исследование и дальнейшее использование результатов. Применяя современные пакеты прикладных программ, можно получить численные решения этих же контактных задач без учета приближенных предположений модели Бернулли – Эйлера [10] (хотя отказ от учета этих предположений и приводит к ряду трудностей в программировании [10]). Поэтому представляет интерес сравнение аналитических результатов, полученных в рамках модели Бернулли – Эйлера, и численных результатов, полученных с использованием пакета прикладных программ. Для контактных задач теории балок примеров такого сравнения в литературе не имеется.

Целью настоящей статьи является сравнение аналитического и численного решений контактной задачи для двух одинаковых консольных балок (рис. 1) длины  $L$ , ширины  $w$  (в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 1), толщины  $H$ , изготовленных из материала с модулем Юнга  $E$ . Между балками имеется зазор высоты  $h$  (в отсутствие нагрузки). К нижней балке приложена распределенная нагрузка с постоянной плотностью  $q_0$ . Под действием этой нагрузки балки испытывают слабый (линейный) изгиб с односторонним контактом; трением пренебрегаем. Требуется найти перемещения и напряжения в балках. Упомянутое сравнение решений позволяет оценить, с одной стороны, точность аналитического решения и границы его применимости, а с другой – наглядность и простоту получения этого решения.

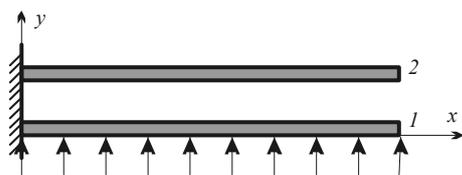


Рис. 1. Модельная конструкция

Численные расчеты проведены Jorge R. Matienzo (университет Сан-Паулу, Бразилия), которому автор выражает глубокую благодарность.

### Постановка и аналитическое решение задачи в рамках модели Бернулли – Эйлера

Согласно этой модели [1] задача сводится к отысканию линий изгиба балок  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , причем

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^L G(x,s)(q_0 - q(s)) ds; \\ y_2(x) &= h + \int_0^L G(x,s)q(s) ds, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q(x)$  – плотность (на единицу длины) сил взаимодействия балок;

$$G(x,s) = \frac{2}{EwH^3} \begin{cases} s^2(3x-s) & (x \geq s), \\ x^2(3s-x) & (x < s). \end{cases} \quad (2)$$

Далее задача, сводящаяся теперь к отысканию  $q(x)$ , ставится в соответствии с подходом, предложенным в [5]. Будем считать, что  $q(x)$  имеет вид

$$q(x) = p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i), \quad (3)$$

где  $p(x) \geq 0$  – кусочно-непрерывна и непрерывна справа при  $0 \leq x \leq L$ ;  $P_i \geq 0$ ;  $0 < x_i \leq L$ ; сумма конечна;  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Обозначим  $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$  (расстояние между балками). Из (1) следует, что

$$r(x) = h + \int_0^L G(x,s)(2q(s) - q_0) ds. \quad (4)$$

Учитывая условие одностороннего контакта балок, приходим к следующей математической постановке задачи.

**Задача.** Найти функцию  $q(x)$  вида (3) такую, что при  $0 \leq x \leq L$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (q(x) > 0), \\ \geq 0 & (q(x) = 0), \end{cases} \quad (5)$$

где  $r(x)$  выражается формулой (4).

**Утверждение 1.** Поставленная задача может иметь только одно решение.

*Доказательство* аналогично доказательству единственности в [5] и поэтому здесь не приведено.

**Утверждение 2.** Обозначим  $\alpha = EwH^3h/(q_0L^4)$ .

Тогда решение поставленной задачи имеет следующий вид.

**а)** Если  $\alpha > 3/2$ , то  $q(x) = 0$  (контакт балок отсутствует).

**б)** Если  $1/6 \leq \alpha \leq 3/2$ , то  $q(x) = P\delta(x-L)$  (контакт в одной точке на конце балок), где

$$P = (q_0L/16)(3-2\alpha). \quad (6)$$

**с)** Если  $\alpha < 1/6$ , то

$$q(x) = Q\delta(x-\lambda) + \begin{cases} 0 & (0 \leq x < \lambda), \\ q_0/2 & (\lambda \leq x \leq L) \end{cases} \quad (7)$$

(контакт по части балок), где

$$\lambda = (6\alpha)^{1/4}L, \quad Q = q_0\lambda/6. \quad (8)$$

*Доказательство*

**а)** Очевидно, что  $q(x)$  имеет вид (3). При  $q(s) = 0$  из (4) и (2) находим:

$$r(x) = \frac{h}{2\alpha} (2\alpha - 3 + (1-\xi)(4 - (1-\xi)^3)),$$

где  $\xi = x/L$ . Так как  $\alpha > 3/2$  и  $0 \leq \xi \leq 1$ , то  $r(x) > 0$  при  $0 \leq x \leq L$ ; следовательно, (5) выполнено.

**б)** Так как  $\alpha \leq 3/2$ , то  $P \geq 0$ ; следовательно,  $q(x)$  имеет вид (3). Подставляя  $q(s) = P\delta(s-L)$  в (4) и, учитывая (6), (2), находим:

$$r(x) = \frac{h}{4\alpha} (1-\xi) \left( (6\alpha-1)\xi(2-\xi) + 2(1-\xi)^2(2\alpha+\xi) \right).$$

Так как  $\alpha \geq 1/6$  и  $0 \leq \xi \leq 1$ , то  $r(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Далее,  $q(x) > 0$  только при  $x = L$ , а  $r(L) = 0$ . Таким образом, (5) выполнено.

**с)** Так как  $\alpha < 1/6$ , то  $\lambda < L$ ; очевидно, что  $q(x)$  имеет вид (3). Подставляя (7), (8), (2) в (4), находим:

$$r(x) = \begin{cases} h(1+3x/\lambda)(1-x/\lambda)^3 & (0 \leq x < \lambda), \\ 0 & (\lambda \leq x \leq L). \end{cases} \quad (9)$$

Отсюда следует, что  $r(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L$ . Далее,  $q(x) > 0$  только при  $\lambda \leq x \leq L$ , а  $r(x) = 0$  при  $\lambda \leq x \leq L$ . Таким образом, (5) выполнено и утверждение 2 доказано.

Построенное решение дает возможность найти аналитические выражения для напряжений  $\sigma_1(x)$ ,  $\sigma_2(x)$  в балках (единственная существенная компонента  $\sigma_{xx}$  тензора напряжений на нижней поверхности балки). В рамках модели Бернулли – Эйлера [1]

$$\sigma_k(x) = \frac{6}{wH^2} \int_x^L (s-x)q_k(s)ds, \quad (10)$$

где  $q_k(x)$  – плотность нагрузки, действующей на балку номер  $k$ . Из (7), (8), (10) получаем, например, для случая (с):

$$\sigma_1(x) = \frac{3q_0}{wH^2} \times \begin{cases} x^2 - x(L+2\lambda/3) + (3L^2 + \lambda^2)/6 & (0 \leq x \leq \lambda), \\ (L-x)^2/2 & (\lambda \leq x \leq L), \end{cases} \quad (11)$$

$$\sigma_2(x) = \frac{3q_0}{wH^2} \times \begin{cases} x(2\lambda/3-L) + (3L^2 - \lambda^2)/6 & (0 \leq x \leq \lambda), \\ (L-x)^2/2 & (\lambda \leq x \leq L). \end{cases} \quad (12)$$

### Численное решение задачи без приближений модели Бернулли – Эйлера и сравнение решения с приближенным аналитическим

Постановка контактной задачи теории упругости и доказательство единственности решения являются стандартными [4], [11] и поэтому здесь не приведены. Численное решение проводилось с помощью пакета ANSYS 5.7. Значения параметров:  $L = 300$  мм,  $w = 50$  мм,  $H = 15$  мм,  $h = 0,1$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $q_0 = 10$  Н/мм. Для этих значений  $\alpha = 0,042$ , следовательно, в рамках модели Бернулли – Эйлера имеет место случай (с).

На рис. 2 приведены полученные численно значения  $q(x)$ . Сравнение рис. 2 с (7) можно провести следующим образом. Формула (7) содержит равномерно распределенную нагрузку с плотностью  $q_0/2$ , которая скачком обращается в нуль при  $x = \lambda$  и сосредоточенную силу  $Q$  при  $x = \lambda$ . Численный расчет приводит к сглаженному скачку и распределенной нагрузке вместо сосредоточенной силы. Соответствующие распределения (в частности, максимальное численное значение  $q(x)$  на рис. 2) не могут быть найдены в рамках модели Бернулли – Эйлера, но некоторое сравнение все же может быть выполнено. Имеется хорошее совпадение численного значения  $q(L)$  и соответствующего аналитического значения  $q_0/2$ . Численно максимальное значение  $q(x)$  достигается при  $x$ , близком к аналитическому значению  $\lambda$ . Далее, нетрудно численно найти  $F = \int_0^L q(x)dx = 800$  Н; тогда величина  $F - q_0(L-\lambda)/2 = 360$  Н дает оценку  $Q$ , которая близка к аналитическому значению 354 Н.

На рис. 3 приведены аналитические (см. (9)) и численные значения  $r(x)$ ; имеется их хорошее совпадение. На рис. 4 приведены аналитические (см.

(11), (12)) и численные значения  $\sigma_1(x)$ ,  $\sigma_2(x)$ ; также имеется их достаточно хорошее совпадение.

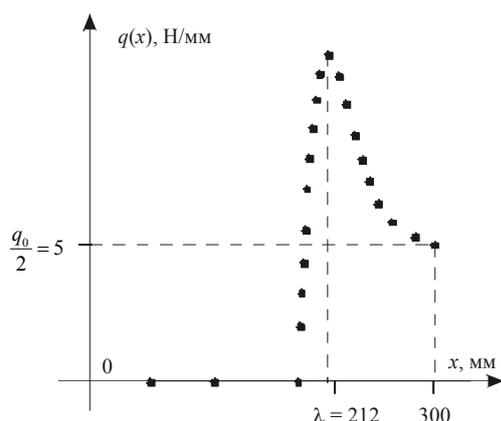


Рис. 2. Численные значения плотности контактной нагрузки

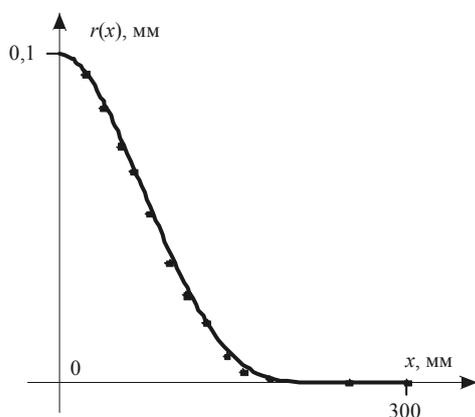


Рис. 3. Численные (точки) и аналитические (линия) значения расстояния между балками

### Выводы

Модель Бернулли – Эйлера в контактной задаче для балок позволяет с хорошей точностью найти аналитически расстояние между балками и напряжения в балках. Плотность сил взаимодействия балок находится аналитически «схематично», а именно содержит сосредоточенную силу и (конечный) скачок, которым в численном решении соответствуют гладкие распределения, согласующиеся с аналитической «схемой». Эта модель поэтому является корректной и может быть использована для быстро получаемых и имеющих хорошую точность аналитических решений в контактных задачах для балок.

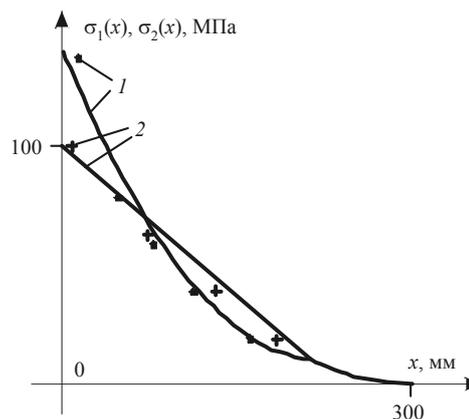


Рис. 4. Численные (точки) и аналитические (линии) значения напряжений в балках

### Библиографические ссылки

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1988. – 711 с.
2. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М. : Наука, 1973. – 400 с.
3. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М. : Машиностроение, 1980. – 415 с.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М. : Мир, 1989. – 510 с.
5. Няшин Ю. И., Осипенко М. А., Рудаков Р. Н. К теории изгиба листовой рессоры // Изв. РАН МТТ. – 2002. – № 6. – С. 134–143.
6. Осипенко М. А., Няшин Ю. И. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. – 2011. – Т. 11. – Вып. 1. – С. 77–84. – (Математика. Механика. Информатика).
7. Осипенко М. А., Таланцев Н. Ф. Высокоточный численный метод решения контактной задачи в классической модели многолистовой рессоры // Вестник Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1669–1671.
8. Осипенко М. А. Аналитический расчет статического изгиба двухлистовой рессоры с параболическим профилем короткого листа // Вестник ИжГТУ. – 2012. – № 3(55). – С. 146–150.
9. Осипенко М. А., Няшин Ю. И. Новый итерационный метод расчета многолистовой рессоры // Вычисл. мех. спл. сред. – 2012. – Т. 5. – № 4. – С. 371–376.
10. Пестренин В. М., Пестренина И. В., Таланцев Н. Ф. Численный анализ напряженно-деформированного состояния листовых рессор // Вычисл. мех. спл. сред. – 2009. – Т. 2. – № 2. – С. 74–84.
11. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. – М. : МГАПИ, 1997. – 340 с.

M. A. Osipenko, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University

### On the Accuracy of Bernoulli – Euler Model in Contact Problems for Beams

The analytical solution of the contact problem for bending of two identical beams with the gap is obtained on basis of Bernoulli – Euler model. The comparison is made with the numerical solution that does not include the approximations of this model. The good agreement is found between the numerical and analytical values of stresses and contact distances. The contact load found analytically contains the concentrated force and the finite jump. This is the correct outline of the load found numerically. The conclusion is made up about the correctness and acceptable accuracy of Bernoulli – Euler model.

**Key words:** beam, bending, Bernoulli – Euler model, contact problem, analytical solution, numerical solution.