Полученные таким образом математические модели поверхностей зубьев-перемычек, а также полученные ранее модели поверхностей наружных зубьев [6] позволят впоследствии смоделировать пространственное зацепление колес с арочной формой зуба и оценить характер влияния его геометрических параметров и параметров режущего инструмента на качественные показатели планетарных передач с внутренним локализованным контактом.

Список литературы

1. *Сызранцев В. Н.* Синтез зацеплений цилиндрических передач с локализованным контактом : дис. … д-ра техн. наук. – Курган, 1989. – 407 с.

2. *Решетов Д. Н.* Детали машин : учебник для студентов машиностроительных и механических специальностей вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с. : ил.

3. *Плеханов Ф. И.* Зубчатые планетарные передачи. Типы, основы кинематики, геометрии и расчета на прочность : учеб. пособие для высших учебных заведений. – Ижевск : Удмуртия, 2003. – 200 с.

4. *Кузнецов В. С.* Моделирование зацеплений безводильной коаксиальной планетарной передачи 3К и исследование влияния их геометрических параметров на плавность работы : дис. … канд. техн. наук. – Ижевск, 2005. – 180 с.

5. *Литвин Ф. Л.* Теория зубчатых зацеплений. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Наука, 1968. – 584 с.

6. *Кузнецов В. С.*, *Могильников Е. В.* Математическое и компьютерное моделирование поверхности арочного зуба в станочном зацеплении // Вестник ИжГТУ. – 2010. – № 3. – С. 29–32.

V. S. Kuznetsov, Candidate of Technical Sciences, Glazov Branch of Izhevsk State Technical University
E. V. Mogilnikov, Postgraduate Student, Glazov Branch of Izhevsk State Technical University

Modeling of a Face of a Non-Standard Internal Arched Tooth of the Planetary Gearing in Machine-Tool Mesh

The way of mathematical and computer modeling of an active face of a non-standard internal arched tooth of the planetary gearing on the basis of a synthesis machine-tool mesh is discussed.

Key words: planetary gearing, straight arched tooth, machine-tool mesh, active face, computer-generated model.

УДК 621.452.32:681.51

Б. В. Кавалеров, кандидат технических наук, Пермский государственный технический университет
В. П. Казанцев, доктор технических наук, доцент, Пермский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОЙ НАСТРОЙКИ РЕГУЛЯТОРОВ ГАЗОТУРБИННЫХ МИНИ-ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ

Разработана методика получения редуцированной динамической модели для поиска оптимальных настроек регуляторов газотурбинных мини-электростанций. Модель получена на основе аппроксимации сложной нелинейной модели электроэнергетической системы и быстрорешаемых идентификационных процедур.

Ключевые слова: электроэнергетическая система, газотурбинная электростанция, моделирование, идентификация.

Авиационные двигатели находят широкое применение в наземных условиях, в том числе в качестве энергетического привода для синхронных генераторов (СГ). Известно, что авиационная газотурбинная установка (ГТУ) в целом работоспособна только при наличии системы автоматического управления (САУ). Для наземных энергетических ГТУ требования к САУ возрастают, поскольку в этом случае помимо обеспечения устойчивости работы ГТУ и ограничений режима ГТУ необходимо обеспечивать требуемые показатели качества вырабатываемой электроэнергии. Вначале в качестве устройств управления использовались конвертированные авиационные электронные регуляторы (РЭД), позже появились специальные блоки управления двигателями (БУД), а в настоящее время – комплексные мультипроцессорные системы. Тем не менее определенные проблемы обеспечения качества вырабатываемой электроэнергии сохраняются при резких колебаниях нагрузки и при переходе с параллельного режима на автономный режим (без параллельной работы с централизованной электросетью). Сегодня такие переключения очень часто ведут к срабатыванию защиты и останову электростанции, а частые пуски и остановы, естественно, снижают общий ресурс. Проблема заключается в том, что проектирование и настройка средств управления требуют изучения свойств объекта управления и характера внешних возмущений. Однако для испытания САУ электроэнергетической системы (ЭЭС) ввиду ее сложности и ответственности как правило не допускается проведение полного на-

Получено 11.01.11

бора натурных экспериментов. Ограниченные же натурные эксперименты на специальных испытательных площадках не позволяют с нужной достоверностью оценить функционирование САУ и к тому же требуют значительных затрат времени и материальных ресурсов, т. е. весьма трудоемки. В связи с этим для испытания и предварительной настройки систем управления используют математические модели. Наиболее эффективно при этом использовать компьютерное моделирование в сочетании с полунатурными и натурными испытаниями, так как именно результаты натурных испытаний позволяют оценить правильность решений, найденных на компьютерной модели, а компьютерная модель и натурный эксперимент взаимно дополняют друг друга. В статье рассматривается построение упрощенных быстрорешаемых идентификационных динамических моделей ЭЭС для предварительной настройки САУ ГТУ.

Настройка параметров САУ

Быстрорешаемые идентификационные модели открывают возможность использовать автоматическую настройку и оптимизацию параметров управляющих устройств САУ энергетических ГТУ в ходе компьютерных и полунатурных испытаний. Задача выбора оптимальных настроек регуляторов является задачей многокритериальной оптимизации с нелинейными ограничениями. Решать такую задачу целесообразно методами нелинейного программирования, основная идея которых заключается в многошаговом движении в направлении экстремума.

Сформулируем задачу нелинейного программирования.

Целевая функция

$$J = J(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \tag{1}$$

зависит от n-мерного вектора переменных состояния системы, и она минимизируется путем варьирования вектора параметров $\mathbf{R}$ системы (лежащего в некоторой области параметров $\boldsymbol{Z}$):

$$\min_{\mathbf{R}\in Z} J(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \tag{2}$$

при векторе ограничений

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{R}) \in \Psi, \tag{3}$$

причем в эти ограничения входят дифференциальные уравнения динамической системы (динамические ограничения) и ограничения $\mathbf{R} \in Z$. Вектор параметров системы $\mathbf{R}$ относится к параметрам регуляторов системы.

Сложность решения задачи нелинейного программирования в основном определяется видом ограничений. Использование сложной динамической компьютерной модели приводит к весьма большим затратам машинного времени. Например, характерный переходный процесс реальной продолжительностью 1 с для системы из 6 параллельных энергоагрегатов и распределенной комплексной электрической нагрузки рассчитывается с помощью одноточечного метода Рунге – Кутта 4-го порядка за время 14,6 мин на базе Pentium IV, 3 GHz персонального компьютера [1]. Для каждого сочетания варьируемых параметров r_k (т. е. для каждого частного значения вектора $\mathbf{R}$) необходимо численно интегрировать систему дифференциальных уравнений, входящих в ограничения (2). В связи с этим известны подходы, основанные на технике алгебраизации исходных дифференциальных уравнений или перехода от дифференциальных уравнений к невязкам метода ортогональных проекций (обобщенного метода Галеркина) [2] и др. В статье предлагается подход, основанный на упрощении исходных дифференциальных уравнений сложной нелинейной модели ЭЭС на основе методов идентификации.

Сложная модель ЭЭС

Сложная модель ЭЭС состоит из двух уровней – модели элементов и модели их взаимодействия [3]. Модель каждого структурного элемента ЭЭС, несмотря на существенные внутренние отличия, описывается единообразно в форме векторно-матричного уравнения:

$$p\mathbf{I} = \pm\mathbf{AU} - \mathbf{BI} - \mathbf{H}, \tag{4}$$

где $\mathbf{I}$, $p\mathbf{I}$ – вектор токов и вектор производных токов элемента; $\mathbf{U}$ – вектор напряжений, приложенных между внешними зажимами элемента; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – матрицы, размерность которых зависит от системы координат, в которых моделируется структурный элемент, а также от того, полные это уравнения или упрощенные; $\mathbf{H}$ – вектор, определяющий воздействие на элемент со стороны средств регулирования электрических параметров.

Математическая модель взаимодействия структурных элементов использует матрицу инцидентности $\mathbf{M}$, отражающую топологию рассматриваемой локальной системы электроснабжения:

$$\mathbf{MGM}^T\mathbf{U} = -\mathbf{MW} - \mathbf{M}'\mathbf{I}, \tag{5}$$

где $\mathbf{M}$ – клеточная матрица инцидентности, клетками которой являются единичные, нулевые матрицы или матрицы преобразований координат; $\mathbf{M}^T$ – транспонированная матрица инцидентности; $\mathbf{G}$ – блочная матрица проводимостей ветвей (элементов), образующих систему; $\mathbf{W}$ – вектор, полученный из правых частей уравнений элементов в форме (4); $\mathbf{M}'$ – матрица, элементами которой являются нулевые клетки или клетки производных элементов матриц преобразования координат; $\mathbf{U}$ – вектор искомых напряжений узлов.

Модель взаимодействия элементов построена так, что элементы обмениваются между собой информацией только через внешние переменные – статорные токи и напряжения.

Идентификационные модели

Процедура построения быстрорешаемой идентификационной модели включает три основных этапа.

1. Выбор на основе сложной динамической модели ЭЭС характерных переходных процессов (динамических характеристик) для заданного узла комплексной нагрузки.

2. Идентификация матрицы коэффициентов быстрорешаемой модели по результатам полученной динамической характеристики.

3. Воспроизведение на быстрорешаемой модели заданных динамических характеристик.

Идентификационные модели обычно ищутся в следующем виде:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (6)$$

где $\mathbf{Y}$ – вектор выходных переменных; $\mathbf{X}$ – вектор входных переменных; $\mathbf{A}$ – матрица коэффициентов размерностью $n \times n$, которую следует идентифицировать. Если в результате наблюдений над сложной нелинейной моделью известны n векторов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$, то матрица $\mathbf{A}$ может быть идентифицирована по n наблюдениям:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_\Sigma \mathbf{X}_\Sigma^{-1}, \quad (7)$$

где $\mathbf{Y}_\Sigma$ и $\mathbf{X}_\Sigma$ – матрицы, составленные из n векторов $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}$ соответственно.

Если наблюдений больше чем n, то применяется метод наименьших квадратов, определяемый выражением

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_\Sigma \mathbf{X}_\Sigma^T (\mathbf{X}_\Sigma \mathbf{X}_\Sigma^T)^{-1}, \quad (8)$$

или $\mathbf{A} = \mathbf{Y}_\Sigma \mathbf{X}_\Sigma^+$, где матрица $\mathbf{X}_\Sigma^+$ – псевдообратная матрица такая, что $\mathbf{X}_\Sigma \mathbf{X}_\Sigma^+ \mathbf{X}_\Sigma = \mathbf{X}_\Sigma$. Известно, что она является наилучшей аппроксимацией (по методу наименьших квадратов) соответствующей системы линейных уравнений [4].

Рассмотренный метод используем для идентификации параметров матрицы $\mathbf{F}$, которая является матрицей перехода системы. При этом уравнение (6) записывается следующим образом:

$$\mathbf{V}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{V}(k), \quad (9)$$

где $\mathbf{V}(k)$ – расширенный вектор состояния системы в k-й момент времени; $\mathbf{V}(k+1)$ – расширенный вектор состояния системы в k+1-й момент времени; $\mathbf{F}$ – матрица перехода системы.

Уравнение (9) описывает динамику системы на промежутке времени $[k, k+1]$. Вектор $\mathbf{V}$ включает в себя как входные, так и выходные переменные идентифицируемой системы. Исходная сложная модель ЭЭС является нелинейной. В связи с этим матрицу $\mathbf{F}$ приходится идентифицировать последовательно для отдельных промежутков времени, считая ее стационарной для каждого из этих промежутков. Выбор числа промежутков, на протяжении которых матрица $\mathbf{F}$ предполагается постоянной, определяется исходя из априорной информации.

В качестве примера рассмотрим решение задачи идентификации для такого существенно нелинейного элемента, каким является асинхронный двигатель (АД).

Пример

Рассматривается пуск АД от соизмеримого по мощности СГ (полагаем, что мощность АД составляет 30 % от мощности СГ). Кроме того, к узлу нагрузки подключена незначительная по мощности активно-индуктивная нагрузка. Пуск АД не может быть идентифицирован одной матрицей $\mathbf{F}$. Это связано с тем, что в параметры АД входит скольжение, которое меняется при пуске от 1 до 0.

Обусловленность матриц проверяется по критерию обусловленности Тюринга. Чтобы избежать плохой обусловленности при получении псевдообратной матрицы в случае медленного изменения переменных (режим приближается к установившемуся) целесообразно накладывать на входной сигнал дополнительный идентифицирующий сигнал малой амплитуды, приближающийся по своим характеристикам к белому шуму.

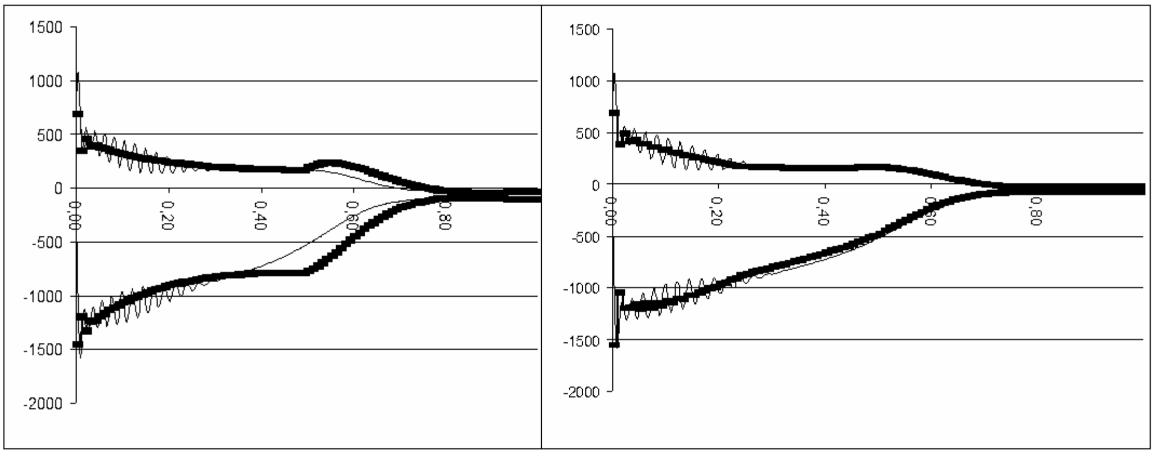
Дополнительно к проверке обусловленности матриц требуется исследовать устойчивость решений. Известно, что устойчивость определяется собственными числами матрицы $\mathbf{A} = ln(\mathbf{F})/\Delta t$ [4]. Проверка устойчивости решения выполняется на идентификационной модели путем проведения модельных экспериментов для заранее выделенного на сложной нелинейной модели семейства динамических характеристик. При этом необходимо задавать допуск (допустимые отклонения) базовой динамической характеристики. При необходимости устойчивость воспроизведения динамической характеристики на идентификационной модели может быть оценена по максимально возможной суммарной погрешности в конце линеаризуемого участка:

$$E_n^k = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \Delta t} d_i, \quad (10)$$

где i – номер переменной; k – номер шага; E_n^k – суммарное отклонение переменных в конце участка от базовых динамических переменных; λ_i – собственные числа матрицы $\mathbf{A}$; Δt – шаг интегрирования; d_i – погрешность метода в начале шага по i-й переменной. Также может быть учтена и оценена скорость нарастания погрешности.

На рис. (*а*) показана аппроксимация переходного процесса двумя матрицами $\mathbf{F}$, все собственные числа – отрицательные, тем самым начальные отклонения переменных сглаживаются, и переходный процесс может быть исследован при отклонениях напряжения (тонкими линиями показан переходный процесс, рассчитанный по сложной модели, жирными линиями – по идентификационной).

На рис. (*б*) тот же переходный процесс аппроксимируется четырьмя матрицами $\mathbf{F}$. Несмотря на то, что совпадение переходного процесса получилось лучше, вторая и третья матрицы здесь содержат положительные собственные значения, соответственно, (–0,7815 + j3,1416; –0,7815 – j3,1416; 0,0151; 0,0801) и (–0,0207 + j0,1250; – 0,0207 – j0,1250i; 0,0510; –0,0039). В результате ошибка имеет тенденцию накапливаться и при определенном уровне отклонения переменных становится недопустимой. Вышесказанное иллюстрирует необходимость предварительной проверки идентифицированного процесса на устойчивость.



а *б*

Расчет переходного процесса по идентификационной модели

В заключение следует отметить, что применение упрощенной идентификационной модели дает значительный выигрыш времени, но одновременно приводит к тому, что показатели качества воспроизводятся приближенно, с определенной погрешностью, вносимой линеаризацией. В случае необходимости получения более точного решения рассмотренная процедура является первым приближением решения задачи. На втором этапе в ограниченной области варьируемых параметров и соответствующей области пространства состояний (в окрестности приближенного решения) можно произвести поиск более точного решения, используя полную нелинейную модель ЭЭС. Вслед за этим целесообразен переход к полунатурным и натурным испытаниям.

Список литературы

1. Сопряжение программных сред в задачах моделирования и тестирования систем управления энергетическими газотурбинными установками / И. А. Шмидт [и др.] // Информационно-управляющие системы. – 2009. – № 5(42). – С. 25–31.

2. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / под ред. А. А. Воронова и И. А. Огурка. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер., 1984. – 344 с.

3. Математическое моделирование газотурбинных мини-электростанций и мини-энергосистем : монография / В. М. Винокур [и др.]. – Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. – 299 с.

4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Физматлит, 2004. – 560 с.

B. V. Kavalerov, Candidate of Technical Sciences, Perm State Technical University
V. P. Kazantsev, Doctor of Technical Sciences, Perm State Technical University

Simulation of Power System for Finding Optimum Modes of Gas-Turbine Mini-Power Plant Regulators

The reduced dynamic model technique, developed for search of optimum modes of gas-turbine mini-power plant regulators. The model is based on approximation of complex nonlinear power system model and high-speed identification procedures.

Key words: power system, gas-turbine power plant, simulation, identification.