УДК 621.398+681.518.3

А. Я. Раскин, ООО «Технотроникс», Пермь
В. Е. Лялин, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОГО СИГНАЛА, ПРОХОДЯЩЕГО ПО КАНАЛУ СВЯЗИ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрена автоматизированная информационно-телекоммуникационная система для сбора и обработки данных о потребляемых коммунальных ресурсах. Разработана математическая модель дискретного сигнала, проходящего по каналу связи информационно-телекоммуникационной системы.

Ключевые слова: информационно-телекоммуникационная система, телеметрия.

Решение задачи централизованного сбора данных о потреблении коммунальных ресурсов, их обработки и управления является весьма актуальным и востребованным на сегодняшний день. Для выполнения данной задачи была разработана информационно-телекоммуникационная система (ИТС) «Ценсор-Технотроникс». Измерительно-контроллирующий блок имеет следующие функции: «охрана» – контроль герконового датчика вскрытия шкафа; «пожар» – контроль пожарного извещателя; «фаза» – выработка аварийного сигнала при пропадании основного электропитания и, соответственно, при переходе шкафа на питание от источника бесперебойного питания; «счетчик» – снятие показаний со счетчиков расхода коммунальных ресурсов. Также система опционально имеет: штатный датчик температуры; выносной датчик температуры; акустический датчик удара (вандализма); четыре дополнительных дискретных входа для подключения аварийной сигнализации типа «сухой контакт».

В ИТС объектовое оборудование (контроллер) принимает данные от датчиков и счетчиков, осуществляет их первичную обработку, направляет подготовленные данные в диспетчерский центр и оказывает управляющие воздействия на контролируемые объекты. Оборудование диспетчерского центра и объектовое оборудование соединено между собой через многочисленные каналы связи. Микропроцессорный контроллер МК-РУС ТЛ 7 (рис. 1) предназначен для работы в составе ИТС в качестве блока, обеспечивающего сбор сигналов с объектовых устройств, работающих в режиме ТЛ (телефонный режим), а также для дистанционного программирования и передачи команд управления на объектовые устройства через ТФОП (телефонная сеть общего пользования).

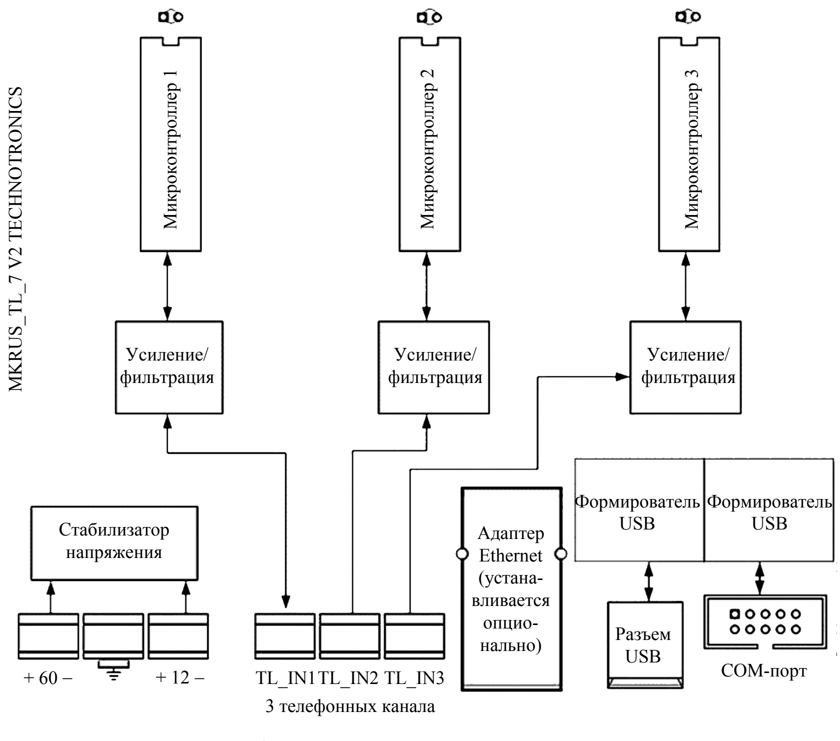

Рис. 1. Структурная схема МК-РУС ТЛ 7

Получено 03.02.11

Основу МК-РУС ТЛ 7 составляет плата, на которой размещены три приемных канала для подключения их к ТФОП (из них один, первый, является также передающим каналом, который используется для дистанционного перепрограммирования и управления объектовыми устройствами), стабилизатор напряжения, формирователь RS232C, формирователь USB и адаптер Ethernet. МК-РУС ТЛ 7 принимает информацию от устройств, работающих в режиме связи через абонентские телефонные номера на исходящей и входящей сторонах. Каждый канал может принимать информацию от всех 32 объектовых устройств. Наличие трех каналов позволяет уменьшить трафик для каждого из них.

Вся информация в ИТС передается по каналам связи. Функционирование канала связи (КС) ИТС в режиме передачи дискретной информации можно описать следующим образом. На вход КС поступает дискретный сигнал

$$\varphi(n\Delta)=\left[\varphi_j(n\Delta)\right]_{j=\overline{1,r}}=\begin{bmatrix}\varphi_1(n\Delta)\\ \vdots \\ \varphi_r(n\Delta)\end{bmatrix},\ \ 0\le n\le N, \qquad (1)$$

представляющий собой r-мерный, $r=1,2,\ldots$ – дискретизированный по времени t сигнал с шагом дискретизации Δ и длительностью по времени T. С учетом выбранного шага дискретизации общее число отсчетов дискретизированного сигнала составляет N, что соответствует функции $[T/\Delta]$, определяющей целую часть числа, равную $(N-1)$, плюс нулевой отсчет. Этот сигнал требуется передать по КС.

В КС на сигнал (1) действуют и случайные возмущения, в результате которых на выходе КС получается сигнал

$$\varphi_{KC}(n\Delta)=\varphi(n\Delta)+\varepsilon(n\Delta),\ \ 0\le n\le N, \qquad (2)$$

где $\varepsilon(n\Delta)=\varepsilon(n\Delta;\varphi(z\Delta;\ \ 0\le z\le n)=\left[\varepsilon_j(n\Delta)\right]_{j=\overline{1,r}}$ (3)

– случайное слагаемое, в общем случае зависящее от момента n и от записанного до этого момента z кривой $\varphi(z\Delta)$, $0\le z\le n$. Возможные графики сигнала (1) и полученного по КС сигнала (2) в случае $r=2$ проиллюстрированы на рис. 2.

Случайный r-мерный процесс (3) мы будем называть процессом помех или просто помехами. Мы предполагаем, что помехи зависят и от записываемого сигнала $\varphi(n\Delta)$. Следовательно, помехи, наложенные на сигнал, также будут зависеть от класса передаваемых по КС сигналов, что является вполне естественным. Чем шире этот класс, тем больше требований должно предъявляться к качеству КС.

Примеры подаваемого на вход КС сигнала $\varphi(n\Delta)$ и полученного на выходе КС сигнала $\varphi_K(n\Delta)$ в случае $r=2$ представлены на рис. 2.

В случае установившегося режима работы КС (мы рассмотрим только этот случай), естественно предположить, что помехи (3) являются реализацией случайного процесса

$$\varepsilon(n\Delta)=m(n\Delta)+X(n\Delta),\ \ n=\ldots,-1,0,1,\ldots, \qquad (4)$$

где $m(n\Delta)=\left[m_j(n\Delta)\right]_{j=\overline{1,r}}$ – некоторая неслучайная функция, имеющая вид

$$m_j(n\Delta)=\mu_j+\sum_{k=1}^{K}R_{jk}\cos(\omega_k n\Delta+\varphi_{jk}),\ \ j=1,2,\ldots,r, \qquad (5)$$

и $X(n\Delta)=\left[X_j(n\Delta)\right]_{j=\overline{1,r}}$ – дискретизированный стационарный в узком смысле действительный случайный процесс со средним $EX(n\Delta)=0$ и достаточно хорошим перемешиванием.

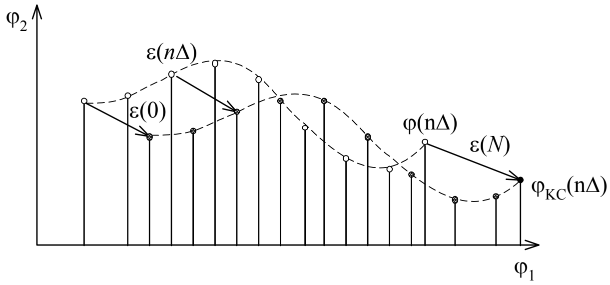

Рис. 2. Графики сигнала и полученного по КС сигнала в случае $r=2$

Здесь μ_j, $R_{jk}\ge 0$, $\omega_k>0$ и $-\pi<\varphi_{jk}\le\pi$ – некоторые константы; μ_j – средние, а R_{jk} и φ_{jk} – амплитуды и фазы колебаний с частотой ω_k. В КС могут быть различные наводки, и поэтому такая структура помех $\varepsilon(n\Delta)$ кажется вполне нормальной. Слагаемые в формуле (5) следует трактовать как незатухающие колебания, вызванные основными независимыми излучателями колебаний, а стационарный процесс $X(n\Delta)$ – как влияние большого числа второстепенных источников возмущений, которые начинают действовать в случайные моменты времени и влияние которых со временем быстро затухает. Вполне понятно, что для КС хорошего качества должно быть $u(n\Delta)\equiv 0$.

В рассматриваемом случае также естественно предположить, что

$$EX_j^2(n\Delta)=\sigma_j^2<\infty,\ \ j=1,2,\ldots,r.$$

В теории стационарных процессов [1, 2, 3] хорошо известно, что тогда случайный процесс $X(n\Delta)$ представим в виде

$$X(n\Delta)=\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}e^{in\Delta\lambda}\xi d\lambda,\ \ -\infty<n<\infty, \qquad (6)$$

где $\xi(d\lambda)=\left[\xi_j(d\lambda)\right]_{j=\overline{1,r}}$ – стохастическая спектральная мера процесса $X(n\Delta)$. При этом справедливы формулы

$$E\xi_j(d\lambda)=0,\ \ E\xi_j(d\lambda)\xi_k(d\lambda)=E_{jk}(d\lambda),$$

$$C(n\Delta)=\int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta}e^{in\Delta\lambda}F(d\lambda),\ \ -\infty<n<\infty,$$

где

$$C(n\Delta) = \left[C_{jk}(n\Delta)\right]_{j=\overline{1,r}}^{k=\overline{1,r}} = \left\{EX_j[\Delta(z+n)]X_k(z\Delta)\right\}_{j=\overline{1,r}}^{k=\overline{1,r}} \quad (7)$$

и $F(d\lambda) = \left[F_{jk}(d\lambda)\right]_{j=\overline{1,r}}^{k=\overline{1,r}}$ – соответственно, ковариационная функция (КФ) и спектральная мера (спектральная функция) процесса $X(n\Delta)$.

Достаточно хорошее перемешивание стационарного процесса $X(n\Delta)$ естественно выражать условием

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|C_{jk}(n\Delta)\right| < \infty, \quad j,k = 1, 2, \ldots, r, \quad (8)$$

т. е. условием, что КФ $C(n\Delta)$ при $|\ n\ | \to \infty$ достаточно быстро убывает. Условие (8) является ограничением на зависимость случайных векторов $X(z\Delta)$ и $X(n\Delta)$ при $|n-z| \to \infty$. Из этого условия вытекает, что стационарный процесс $X(n\Delta)$ имеет ограниченную и непрерывную спектральную плотность (СП):

$$f_\Delta(\lambda) = \left[f_{jk}(\lambda)\right]_{j=\overline{1,r}}^{k=\overline{1,r}},$$

при этом справедливы формулы:

$$C(n\Delta) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} f_\Delta(\lambda) e^{in\Delta\lambda} d\lambda, \; f_\Delta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C(n\Delta) e^{-in\Delta\lambda},$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{jk}^2(n\Delta) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left|f_{jk}(\lambda)\right|^2 d\lambda, \; j,k = 1, 2, \ldots, r. \quad (9)$$

Равенства (9) нам будет удобно записать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\ C(n\Delta)\ |^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (10)$$

где здесь и далее через $|A|$ обозначается норма матрицы

$$A = \left[a_{jk}\right]_{j=\overline{1,r}}^{k=\overline{1,r}}, \text{ т. е. } |A| = \left(\sum_{j,k=1}^{r} |\ a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В рассматриваемом случае и КФ $C(n\Delta)$, и СП $f(\lambda)$ являются $(r\times r)$-матричными, ограниченными, непрерывными и интегрируемыми на всей прямой функциями, при этом для всех t $\left|C_{jk}(n\Delta)\right| \le \sigma_j\sigma_k$, $j,k = 1, 2, \ldots, r$ и для всех λ $\left|f_{jk}(\lambda)\right|^2 \le f_{jj}(\lambda) f_{kk}(\lambda)$, $j,k = 1, 2, \ldots, r$.

В качестве оценки величины помех естественно принять случайную величину

$$Q_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[a_1\varepsilon_1^2(n\Delta) + \ldots + a_r\varepsilon_r^2(n\Delta)\right], \quad (11)$$

представляющую собой среднее во времени взвешенной суммы квадратов всех помех. Величина помех (11) характеризует качество для данного случая КС. Коэффициенты a_j здесь служат для сравнения дименций и для взвешивания ошибок $\varepsilon_j(n\Delta)$ согласно их влияния на качество регистрации. Их можно интерпретировать как цены штрафа за ошибки $\varepsilon_j(n\Delta)$.

Поскольку мы не определили дименций сигнала $\varphi(n\Delta)$, то, не ограничивая общности, можем считать, что коэффициенты $a_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$. То есть мы предполагаем, что a_j уже участвует в определении сигнала $\varphi(n\Delta)$ и помех $\varepsilon(n\Delta)$. Это предположение позволит нам существенно упростить приводимые ниже формулы. Согласно ему формулу (11) можно переписать следующим образом:

$$Q_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|\varepsilon(n\Delta)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\varepsilon_1^2(n\Delta) + \ldots + \varepsilon_r^2(n\Delta)\right].$$

В связи с дискретизацией приходится оперировать вероятностными характеристиками дискретизированного процесса.

Достаточно хорошее перемешивание стационарного процесса $X(n\Delta)$ естественно выражать условием

$$\Sigma\left|C_{jk}(n\Delta)\right| < \infty, \quad j,k = 1, 2, \ldots, r, \quad (12)$$

т. е. условием, что КФ $C(n\Delta)$ при $|n| \to \infty$ достаточно быстро убывает. Условие (12) является ограничением на зависимость случайных векторов $X(z\Delta)$ и $X(n\Delta)$ при $|n-z| \to \infty$.

$$Y(n) = X(n\Delta), \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Очевидно, что $EY(n) = 0$ и $C_{YY}(n) = C_{XX}(n\Delta)$, где C_{YY} и C_{XX} – КФ, соответственно, процессов $Y(n)$ и $X(n\Delta)$. Далее, используя периодичность функции $e^{in\Delta\lambda}$, получаем:

$$Y(n) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{in\Delta\lambda}\eta(d\lambda), \quad n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \quad (13)$$

где стохастическая спектральная мера $\eta(d\lambda)$ определяется следующим образом: для любого измеримого множества $A \subset [-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$

$$\eta(A) = \sum_{l=-\infty}^{\infty}\xi\left(A + l\frac{2\pi}{\Delta}\right). \quad (14)$$

Из (13)–(14) вытекает, что спектральная мера F_{YY} и СП f_{YY} последовательности $Y(n)$ вычисляются по формулам:

$$F_{YY}(A) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} F_{XX}\left(A + l\frac{2\pi}{\Delta}\right)$$
и
$$f_{YY}(\lambda) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{XX}\left(\lambda + l\frac{2\pi}{\Delta}\right), \; -\frac{\pi}{\Delta} < \lambda \le \frac{\pi}{\Delta}, \quad (15)$$

где F_{XX} и f_{XX} – спектральная мера и СП процесса $X(t)$. В (14)–(15) мы применяем обозначение $A + x = \{y\colon y = \alpha + x, \ \alpha \in A\}$.

Полную характеристику качества КС дает только функция распределения

$$FN(x) = P\{Q_N < x\},\ \ x \geq 0, \qquad (16)$$

точный теоретический подсчет которой обычно бывает невозможным. Поэтому большой интерес представляет асимптотическое поведение функции (16) при неограниченно возрастающем времени регистрации, т. е. при $N \to \infty$.

Иллюстрация вероятности $P\{Q_N \geq EQ_N + x\}$ представлена на рис. 3.

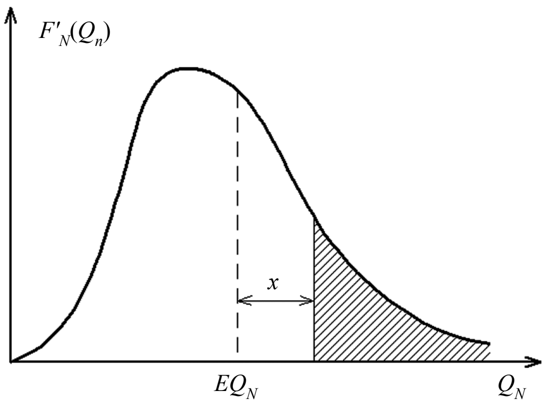

Рис. 3. Вероятность $P\{Q_N \geq EQ_N + x\},\ x \geq 0$

Если КС предназначен для передачи сигналов из некоторого класса, то для характеристики его работы необходимо знать распределения (16) для нескольких функций $\varphi(n\Delta)$, достаточно хорошо описывающих класс всех передаваемых сигналов.

Более простыми, чем (16) неслучайными характеристиками качества КС являются среднее значение помех EQ_N (их естественно называть риском передачи) и дисперсия помех DQ_N. Однако они неоднозначно описывают распределение (16), поэтому их знания недостаточно для более точной характеристики качества КС.

Важной, наглядной и сравнительно полной характеристикой качества КС является вероятность

$$P\{Q_N \geq EQ_N + x\},\ \ x \geq 0, \qquad (17)$$

т. е. вероятность, что помехи Q_N превысят уровень $EQ_N + x$. Эта вероятность проиллюстрирована на рис. 3 и представляет собой заштрихованную площадь. Знание вероятности (17) для всех $x \geq 0$ эквивалентно знанию функции распределения $FN(x)$ для всех $x \geq EQ_N$.

Список литературы

1. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / под ред. акад. УССР В. С. Королюка. – Киев : Наук. думка, 1978. – 548 с.
2. *Гихман И. И.*, *Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М. : Наука, 1977. – 568 с.
3. *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М. : Мир, 1975. – 648 с.

A. Ya. Raskin, LLC “Tehnotronics”, Perm
V. E. Lyalin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Mathematical Model of a Discrete Signal Passing through a Communication Channel of Automated Information and Telecommunication System

The automated information and telecommunication system for collection and processing of data for consumed municipal resources is considered. The mathematical model of a discrete signal passing through the system communication channel is developed.

Key words: information and telecommunication system, telemetry.