

УДК 532.2:519.7

**М. Г. Бояршинов**, доктор технических наук, профессор, Лысьвенский филиал Пермского государственного технического университета

**А. В. Харченко**, кандидат физико-математических наук, Пермский государственный технический университет

**Д. С. Балабанов**, аспирант, Пермский государственный технический университет

## ПЕРЕНОС И РАССЕЯНИЕ ВОЗДУШНЫМ ПОТОКОМ ТЯЖЕЛОГО НАГРЕТОГО ГАЗА

Поставлена задача о движении смеси воздуха и тяжелого нагретого газа, поступающего из локализованного источника. Для моделирования применяется система уравнений Эйлера (неразрывности, импульса, энергии, концентрации и состояния) с соответствующими краевыми условиями. Численное решение строится на основе метода крупных частиц (метод Давыдова). Вычислительный эксперимент позволяет изучать эволюцию полей скорости, плотности, энергии, давления и концентрации газовой примеси в рассматриваемой пространственной области.

**Ключевые слова:** газовая динамика, система уравнений Эйлера, метод крупных частиц.

Особенности переноса и рассеяния весомого нагретого (охлажденного) газа обусловлены взаимодействием механизмов положительной (повышенная температура, низкая плотность) и отрицательной (пониженная температура, высокая плотность) плавучести газов, находящихся в поле силы тяжести. Прикладное значение исследования механизмов переноса и рассеяния таких газов атмосферными потоками определяется наличием значительного числа реальных процессов, в том числе антропогенной природы, влияющих на состояние окружающей среды: подъем легких взрывоопасных газов на значительные высоты [1], растекание холодного тяжелого газа в результате промышленной аварии [2], формирование и перенос на дальние расстояния облака продуктов сгорания ракетного топлива при проведении огневых наземных испытаний [3], загрязнение приземной атмосферы урбанизированной территории отработанными газами автомобильного транспорта [4] и пр.

Для моделирования движения газовой смеси потока, образованного смешением условно чистого воздуха с тяжелым нагретым газом, поступающим из локализованного источника, используется система уравнений Эйлера, описывающая движение сплошной среды в рассматриваемой области и включающая эволюционные уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = m \delta(\mathbf{r}_s), \quad (1)$$

движения

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) + \nabla P = \rho \mathbf{g} + m \mathbf{V}_m \delta(\mathbf{r}_s), \quad (2)$$

полной удельной энергии

$$\frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U \mathbf{V}) + \nabla \cdot (P \mathbf{V}) = e \delta(\mathbf{r}_s), \quad (3)$$

состояния (адиабатический процесс)

$$\rho(k-1)(U - \mathbf{V} \mathbf{V} / 2) - \mu P = 0 \quad (4)$$

и концентрации (в диффузионном приближении)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \mathbf{V}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla C) + q \delta(\mathbf{r}_s). \quad (5)$$

Здесь обозначено:  $\rho$  – плотность газовой смеси;  $\mathbf{V}$  – вектор скорости потока с компонентами  $V_x, V_y, V_z$ ;  $U$  – полная удельная энергия;  $P$  – давление;  $\mu$  – молярная масса;  $k$  – показатель адиабаты;  $\delta(\mathbf{r}_s)$  – дельта-функция Дирака;  $\mathbf{r}_s$  – радиус-вектор положения точечного источника;  $C$  – концентрация газовой примеси;  $\lambda$  – коэффициент диффузии;  $\mathbf{g}$  – вектор ускорения свободного падения;  $e$  – мощность точечного источника,  $q$  – интенсивность поступления тяжелого газа из источника,  $m$  – массовый расход газовой смеси, поступающей из источника со скоростью  $V_m$ ,  $q \leq m$ . Принимается, что полное давление газа  $P$  может быть представлено в виде суммы гидростатической составляющей  $P_g = P_0 - \rho g z$  ( $P_0$  – давление воздуха на уровне поверхности земли;  $g$  – ускорение свободного падения) и отклонения  $p$  давления воздуха от гидростатического:

$$P = p + P_g. \quad (6)$$

Для учета плавучести газовой примеси применяется приближение Буссинеска [5], использующее разложение в частичный ряд Тейлора функции плотности газовой смеси:

$$\rho(C, T) = \rho(C_0, T_0) + \rho'_C(C_0)(C - C_0) + \rho'_T(T_0)(T - T_0) = \rho_0 + \alpha C + \beta(T - T_0), \quad (7)$$

где  $\rho_0 = \rho(C_0, T_0)$ ;  $\alpha = \rho'_C(C_0)$  – концентрационный коэффициент плотности;  $\beta = \rho'_T(T_0)$  – коэффициент температурного расширения газа;  $T$  – температура газовой смеси;  $C_0$  и  $T_0$  – концентрация и температура газа в невозмущенном потоке, при этом  $C_0 = 0$ . Принято, что для рассматриваемого диапазона изменения  $T$  полная удельная энергия и температура связаны соотношением  $U - \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}/2 = c_v T$ .

Пусть в объеме  $\Omega$  содержатся воздух, имеющий плотность  $\rho_0$ , и пассивная газовая примесь с плотностью  $\rho_1$ , занимающая объем  $\Omega_1$ . Массы воздуха и примеси, соответственно,  $m_0 = \rho_0(\Omega - \Omega_1)$  и  $m_1 = \rho_1 \Omega_1$ .

Плотность газовой смеси в рассматриваемом объеме  $\Omega$  определяется выражением

$$\rho = \frac{m_0 + m_1}{\Omega} = \frac{\rho_0(\Omega - \Omega_1) + m_1}{\Omega} = \rho_0 - \rho_0 \frac{\Omega_1}{\Omega} + C = \rho_0 - \frac{\rho_0}{\rho_1} C + C = \rho_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) C,$$

где  $C = m_1/\Omega$  – концентрация газовой примеси в объеме  $\Omega$ . Сравнение полученного выражения и соотношения (7) позволяет определить величину концентрационного коэффициента плотности  $\alpha = 1 - \rho_0/\rho_1$ .

Для определения коэффициента температурного расширения  $\beta$  уравнение состояния газа  $P\Omega = mRT/\mu$  записывается в виде  $\rho = \mu P/RT$ , где  $R$  – универсальная газовая постоянная. Дифференцирование этого уравнения приводит к выражению  $\partial\rho/\partial T = -\rho/T$ , таким образом,  $\beta = -\rho_0/T_0$ .

С учетом принятых гипотез, выражений (6) и (7), уравнения движения (2), полной удельной энергии (3) и состояния (4) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{V}\mathbf{V}) + \nabla p = \mathbf{g}[\alpha C + \beta(T - T_0)] + m\mathbf{V}_m \delta(\mathbf{r}_s), \tag{8}$$

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U\mathbf{V}) + \nabla \cdot (p\mathbf{V}) = -\nabla \cdot (P_g \mathbf{V}) + e\delta(\mathbf{r}_s), \tag{9}$$

$$\rho(k-1)(U - \mathbf{V}\mathbf{V}/2) - \mu p = \mu P_g. \tag{10}$$

В начальный момент времени в рассматриваемой области  $G$  известны распределения компонент вектора скорости, плотности, энергии, концентрации и давления, соответствующие невозмущенному потоку,  $V_x = V_0$ ,  $V_y = 0$ ,  $V_z = 0$ ,  $C = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $U = U_0$ ,  $P = P_0 - \rho g z$ ,  $\mathbf{r} \in G, t = 0$  (схема расчетной области приведена на рис. 1). На входной границе  $\partial G_1$ , а также на боковых границах  $\partial G_3$  и  $\partial G_4$  поддерживаются значения компонент вектора скорости, плотности, энергии и концентрации, соответствующие невозмущенным значениям,  $V_x = V_0$ ,  $V_y = 0$ ,  $V_z = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $U = U_0$ ,  $C = 0$ ,  $\mathbf{r} \in \partial G_1 \cup \partial G_3 \cup \partial G_4, t > 0$ . На выход-

ной границе  $\partial G_2$  заданы условия переноса всех искомым величин:  $\partial V_x/\partial x = 0$ ,  $\partial V_y/\partial x = 0$ ,  $\partial V_z/\partial x = 0$ ,  $\partial\rho/\partial x = 0$ ,  $\partial U/\partial x = 0$ ,  $\partial C/\partial x = 0$ ,  $\mathbf{r} \in \partial G_2, t > 0$ . На нижней  $\partial G_5$  и верхней  $\partial G_6$  границах заданы условия переноса всех искомым величин:  $\partial V_x/\partial z = 0$ ,  $\partial V_y/\partial z = 0$ ,  $\partial V_z/\partial z = 0$ ,  $\partial\rho/\partial z = 0$ ,  $\partial U/\partial z = 0$ ,  $\mathbf{r} \in \partial G_5 \cup \partial G_6, t > 0$ .

Для решения прикладных задач газовой динамики интенсивно развивается и успешно применяется метод крупных частиц (метод Давыдова [6]), позволяющий выполнять расчеты вихревых структур с учетом отрывных явлений, исследовать фильтрационные и струйные течения, газо- и гидродинамические потоки с большими перемещениями и соударяющимися поверхностями раздела, движение многокомпонентных, сыпучих и деформируемых сред, течения сквозь проницаемые объекты и многие другие процессы. В соответствии с идеей метода крупных частиц система уравнений (1), (5), (8)–(10) расщепляется по физическим процессам. Расчет каждого временного слоя разбивается на три этапа. Первый (эйлеровый) этап предполагает, что изменяются лишь величины, относящиеся к ячейке в целом, а сплошная среда предполагается заторможенной. Система уравнений (1), (5), (8) и (9) представляется в виде

$$\begin{cases} \rho = \text{const}, C = \text{const}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \nabla p = \mathbf{g}[\alpha C + \beta(T - T_0)], \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \nabla \cdot (p\mathbf{V}) = -\nabla \cdot (P_g \mathbf{V}) + e\delta(\mathbf{r}_s). \end{cases}$$

Уравнения этой системы записываются в виде разностных схем:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{xijk} &= V_{xijk} - \left( P_{i+\frac{1}{2}jk} - P_{i-\frac{1}{2}jk} \right) \tau / \rho_{ijk} h_x; \\ \tilde{V}_{yijk} &= V_{yijk} - \left( P_{ij+\frac{1}{2}k} - P_{ij-\frac{1}{2}k} \right) \tau / \rho_{ijk} h_y; \\ \tilde{V}_{zijk} &= V_{zijk} - \left( P_{ijk+\frac{1}{2}} - P_{ijk-\frac{1}{2}} \right) \tau / \rho_{ijk} h_z - \\ &\quad - \mathbf{g}[\alpha C_{ijk} + \beta(T_{ijk} - T_0)] \tau / \rho_{ijk}; \\ \tilde{U}_{ijk} &= U_{ijk} - \tau \left\{ \left[ (pV_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (pV_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / h_x + \right. \\ &\quad + \left[ (pV_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (pV_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / h_y + \\ &\quad + \left[ (pV_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (pV_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z + \\ &\quad + \left. \left[ (P_g V_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (P_g V_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / h_x + \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left[ (P_g V_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (P_g V_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / h_y + \\ + \left[ (P_g V_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (P_g V_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z \} / \rho_{ijk}.$$

На втором (лагранжевом) этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Определяются потоки массы за время  $\tau$  через границы эйлеровых ячеек. Для учета направления движения сплошной среды потоки массы, импульса и полной удельной энергии определяются выражениями:

$$(\Lambda \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} = \begin{cases} \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{xi+\frac{1}{2}jk}, \tilde{V}_{xi+\frac{1}{2}jk} \geq 0, \\ \Lambda_{i+1jk} \tilde{V}_{xi+\frac{1}{2}jk}, \tilde{V}_{xi+\frac{1}{2}jk} < 0; \end{cases}$$

$$(\Lambda \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} = \begin{cases} \Lambda_{i-1jk} \tilde{V}_{xi-\frac{1}{2}jk}, \tilde{V}_{xi-\frac{1}{2}jk} \geq 0, \\ \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{xi-\frac{1}{2}jk}, \tilde{V}_{xi-\frac{1}{2}jk} < 0; \end{cases}$$

$$(\Lambda \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} = \begin{cases} \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{yij+\frac{1}{2}k}, \tilde{V}_{yij+\frac{1}{2}k} \geq 0, \\ \Lambda_{ij+1k} \tilde{V}_{yij+\frac{1}{2}k}, \tilde{V}_{yij+\frac{1}{2}k} < 0; \end{cases}$$

$$(\Lambda \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} = \begin{cases} \Lambda_{ij-1k} \tilde{V}_{yij-\frac{1}{2}k}, \tilde{V}_{yij-\frac{1}{2}k} \geq 0, \\ \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{yij-\frac{1}{2}k}, \tilde{V}_{yij-\frac{1}{2}k} < 0; \end{cases}$$

$$(\Lambda \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{zijk+\frac{1}{2}}, \tilde{V}_{zijk+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ \Lambda_{ijk+1} \tilde{V}_{zijk+\frac{1}{2}}, \tilde{V}_{zijk+\frac{1}{2}} < 0; \end{cases}$$

$$(\Lambda \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \Lambda_{ij-1k} \tilde{V}_{zijk-\frac{1}{2}}, \tilde{V}_{zijk-\frac{1}{2}} \geq 0, \\ \Lambda_{ijk} \tilde{V}_{zijk-\frac{1}{2}}, \tilde{V}_{zijk-\frac{1}{2}} < 0. \end{cases}$$

В этих выражениях  $\Lambda$  принимает значения  $\rho, \rho \tilde{V}_x, \rho \tilde{V}_y, \rho \tilde{V}_z, \rho \tilde{U}, C, C \tilde{V}_x, C \tilde{V}_y, C \tilde{V}_z$ . На третьем, заключительном этапе окончательные значения массы, импульса и энергии в момент времени  $\hat{t} = t + \tau$  определяются законами сохранения массы, импульса и энергии, записанными с учетом промежуточных значений параметров потока:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{\mathbf{V}}) + \nabla \cdot (\rho \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{U}) + \nabla \cdot (\rho \tilde{U} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{U}) + \nabla \cdot (\rho \tilde{U} \tilde{\mathbf{V}}) = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C \tilde{\mathbf{V}}) = \nabla \cdot (\lambda \nabla C). \end{cases}$$

Используется аппроксимация этих уравнений разностными схемами:

$$\hat{\rho}_{ijk} = \rho_{ijk} - \tau \left\{ \left[ (\rho \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\rho \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / h_x + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\rho \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / h_y + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\rho \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z \right\};$$

$$\hat{V}_{xijk} = \tilde{V}_{xijk} \rho_{ijk} / \hat{\rho}_{ijk} - \\ - \tau \left\{ \left[ (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_x + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_y + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\rho \tilde{V}_x \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_z \right\};$$

$$\hat{V}_{yijk} = \tilde{V}_{yijk} \rho_{ijk} / \hat{\rho}_{ijk} - \\ - \tau \left\{ \left[ (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_x + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_y + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\rho \tilde{V}_y \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_z \right\};$$

$$\hat{V}_{zijk} = \tilde{V}_{zijk} \rho_{ijk} / \hat{\rho}_{ijk} - \\ - \tau \left\{ \left[ (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_x + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_y + \right. \\ \left. + \left[ (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\rho \tilde{V}_z \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_z \right\};$$

$$\hat{C}_{ijk} = C_{ijk} - \tau \left\{ \left[ (C \tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (C \tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / h_x + \right. \\ \left. + \left[ (C \tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (C \tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / h_y + \right. \\ \left. + \left[ (C \tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (C \tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z \right\};$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ (C\tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (C\tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z \Big\} + \\
 & + \tau \left\{ \left[ (\lambda\nabla C)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\lambda\nabla C)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / h_x + \right. \\
 & + \left[ (\lambda\nabla C)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\lambda\nabla C)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / h_y + \\
 & \left. + \left[ (\lambda\nabla C)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\lambda\nabla C)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / h_z \right\}; \\
 & \hat{U}_{ijk} = \tilde{U}_{ijk} \rho_{ijk} / \hat{\rho}_{ijk} - \\
 & - \Delta t \left\{ \left[ (\rho\tilde{U}\tilde{V}_x)_{i+\frac{1}{2}jk} - (\rho\tilde{U}\tilde{V}_x)_{i-\frac{1}{2}jk} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_x + \right. \\
 & + \left[ (\rho\tilde{U}\tilde{V}_y)_{ij+\frac{1}{2}k} - (\rho\tilde{U}\tilde{V}_y)_{ij-\frac{1}{2}k} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_y + \\
 & \left. + \left[ (\rho\tilde{U}\tilde{V}_z)_{ijk+\frac{1}{2}} - (\rho\tilde{U}\tilde{V}_z)_{ijk-\frac{1}{2}} \right] / \hat{\rho}_{ijk} h_z \right\}.
 \end{aligned}$$

По найденным полям  $\hat{\rho}_{ijk}$ ,  $\hat{U}_{ijk}$ ,  $\hat{V}_{xijk}$ ,  $\hat{V}_{yijk}$ ,  $\hat{V}_{zijk}$  вычисляются распределения температуры и отклонения давления от гидростатического:

$$\begin{aligned}
 T_{ijk} &= \left[ \hat{U}_{ijk} - 0,5(\hat{V}_{xijk}^2 + \hat{V}_{yijk}^2 + \hat{V}_{zijk}^2) \right] / c_V; \\
 p_{ijk} &= (k-1)\hat{\rho}_{ijk} \left\{ \hat{U}_{ijk} - 0,5(\hat{V}_{xijk}^2 + \hat{V}_{yijk}^2 + \hat{V}_{zijk}^2 + \right. \\
 & + \rho_{ijk} \left[ (\hat{V}_{xijk} - \tilde{V}_{xijk})^2 + (\hat{V}_{yijk} - \tilde{V}_{yijk})^2 + \right. \\
 & \left. \left. + (\hat{V}_{zijk} - \tilde{V}_{zijk})^2 \right] / \hat{\rho}_{ijk} \right\} - P_\Gamma.
 \end{aligned}$$

По окончании третьего этапа в ячейке, где расположен источник, в соответствии с уравнениями (1), (5), (8) и (9), с учетом заданных величин  $m$ ,  $e$ ,  $q$  и  $V_m$  пересчитываются значения плотности, энергии, скорости и концентрации:

$$\begin{aligned}
 \rho_{ijk}(\hat{t}) &= \hat{\rho}_{ijk} + m\tau/h_x h_y h_z; \\
 U_{ijk}(\hat{t}) &= \hat{\rho}_{ijk} \hat{U}_{ijk} / \rho_{ijk}(\hat{t}) + e\tau/h_x h_y h_z \rho_{ijk}(\hat{t}); \\
 V_{xijk}(\hat{t}) &= \hat{\rho}_{ijk} \hat{V}_{xijk} / \rho_{ijk}(\hat{t}) + mV_m \tau / h_x h_y h_z \rho_{ijk}(\hat{t}); \\
 C_{ijk}(\hat{t}) &= \hat{C}_{ijk} + q\tau/h_x h_y h_z.
 \end{aligned}$$

На основе изложенного подхода к решению поставленной задачи построен комплекс вычислительных программ, позволяющий исследовать перенос и рассеяние тяжелого нагретого газа, эмитированно-

го локализованным источником. Тестирование и верификация программного комплекса [7] выполнены с использованием точного решения задачи о стационарном течении идеального сжимаемого газа из точечного источника [8] при аппроксимации расчетной области (рис. 1) с использованием от 216 до  $8 \cdot 10^6$  расчетных ячеек и шагах  $\tau$  интегрирования по времени от  $2 \cdot 10^{-9}$  до  $4 \cdot 10^{-8}$  с.

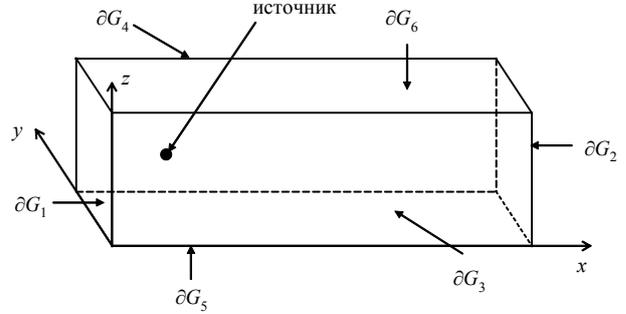


Рис. 1. Схема расчетной области и обозначения ее границ

Вычислительный эксперимент выполнен для области с размерами  $1,0 \times 3,0 \times 1,0$  м<sup>3</sup>; параметры источника:  $m = 0,012$  кг/с,  $q = 0,012$  кг/с, скорость поступления газа из локализованного источника горизонтальна и равна  $V_m = 2,0$  м/с; скорость невозмущенного потока  $V_0 = 1,0$  м/с; температура окружающей среды  $T_0 = 300$  К, температура источника 600 К; коэффициент теплоемкости  $c_V = 12,5$  Дж/кг·К; плотность воздуха  $\rho_0 = 1,205$  кг/м<sup>3</sup>, плотность поступающего газа  $\rho_1 = 10,0$  кг/м<sup>3</sup>. Для аппроксимации области использовано  $20 \times 60 \times 20$  расчетных ячеек; шаг интегрирования по времени принят равным  $10^{-5}$  с.

Результаты вычислительного эксперимента по переносу и рассеянию воздушным потоком тяжелого газа, имеющего температуру окружающей среды, приведены на рис. 2. Газовое облако с изменяющейся концентрацией вытягивается в горизонтальном направлении, увлекаемое горизонтальным потоком воздуха, и одновременно опускается под действием силы тяжести за счет более высокой плотности поступающего газа.

Эволюция переноса и рассеяния нагретого газа с плотностью, равной плотности окружающей воздуха, приведена на рис. 3. Газовое облако, как и в предыдущем случае, вытягивается в горизонтальном направлении. Однако в отличие от предыдущего случая происходит подъем газовой примеси за счет более высокой температуры (более низкой плотности) газовой смеси.

Перенос воздушным потоком и рассеяние тяжелого нагретого газа, находящегося в поле силы тяжести, показаны на рис. 4. За счет горизонтального воздушного потока газоздушная смесь, как и ранее, вытягивается в горизонтальном направлении. За счет первоначального нагрева (и, соответственно, более низкой плотности) происходит поднятие газового облака вследствие превышения подъемной силы над силой тяжести.

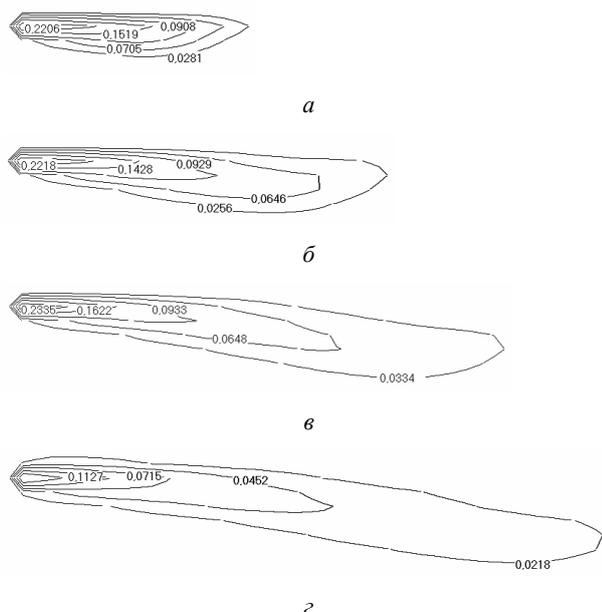


Рис. 2. Эволюция поля концентрации тяжелого газа в плоскости  $x = 0,5$  м в моменты времени 0,5 с (а), 1,0 с (б), 1,5 с (в) и 2,0 с (г)

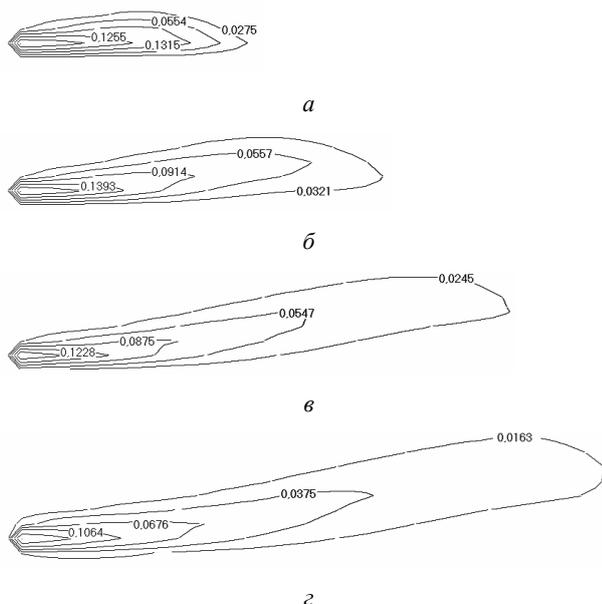


Рис. 3. Эволюция поля концентрации нагретого газа в плоскости  $x = 0,5$  м в моменты времени 0,5 с (а), 1,0 с (б), 1,5 с (в) и 2,0 с (г)

При снижении температуры газовой смеси за счет разбавления нагретого газа холодным окружающим воздухом происходит выравнивание силы тяжести и подъемной силы, что приводит к горизонтальному перемещению центральной части концентрационного облака без подъема или опускания (нейтральная плавучесть). При дальнейшем охлаждении газовой смеси сила тяжести начинает преобладать над подъемной силой, что приводит к опусканию газовой примеси. Следует отметить, что при удалении от источника поступления газовой примеси концентрация газа в значительной степени

снижается, уменьшая тем самым влияние силы тяжести и замедляя процесс оседания газовой примеси.

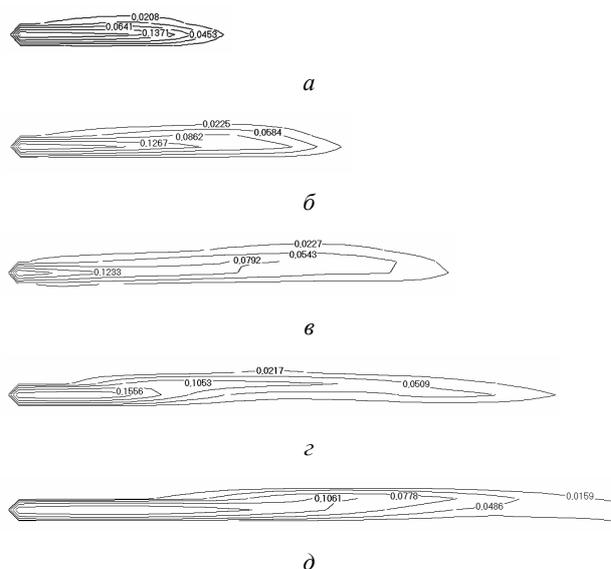


Рис. 4. Эволюция поля концентрации тяжелого нагретого газа в плоскости  $x = 0,5$  м в моменты времени 0,5 с (а), 1,0 с (б), 1,5 с (в), 2,0 с (г) и 3,0 с (д)

**Выводы.** Математическая модель переноса и рассеяния тяжелого нагретого газа строится на основе использования системы уравнений Эйлера, включающей дифференциальные уравнения неразрывности, импульса, энергии, концентрации, а также уравнение состояния с соответствующими начальными и граничными условиями. Для построения разрешающих соотношений применяется метод крупных частиц. Верификация математической модели выполнена с использованием точного решения системы уравнений Эйлера. Компьютерная модель позволяет получать распределения полей скорости, плотности, энергии, давления и концентрации в рассматриваемой области для произвольных моментов времени, исследовать эволюцию газодинамических характеристик газовой смеси, формы и размеров газового облака.

#### Список литературы

1. Бояришинов М. Г., Цаплин А. И. Моделирование переноса метана в атмосфере и оценка возможности его детонаций при аварийном сбросе давления в газопроводе // Науч.-техн. вестник СПбГПУ. – СПб. : Санкт-Петербургский гос. политехн. ун-т, 2010. – № 98(2). – С. 21–31.
2. Едигаров А. С. Численный расчет турбулентного течения холодного тяжелого газа в атмосфере // Журнал вычислительной математики и математической физики. – Т. 31. – № 9. – С. 1369–1380.
3. Бояришинов М. Г., Харченко А. В. Процесс распространения газовой струи при испытаниях ракетного двигателя // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12. – № 12. – С. 66–78.
4. Бояришинов М. Г. Распределение концентрации выхлопных газов вблизи автотрассы со случайным потоком транспорта // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79. – № 6. – С. 128–140.

5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.

6. Численное исследование актуальных проблем машиностроения и механики сплошных и сыпучих сред методом крупных частиц: в 5 т. / Ю. М. Давыдов [и др.]; под ред. Ю. М. Давыдова. – М.: Нац. акад. прикладных наук, 1995. – 1658 с.

7. Бояришинов М. Г., Балабанов Д. С. Вычислительное моделирование движения сжимаемой среды, генерируемой точечным источником // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т. 3. – № 3. – С. 18–31.

8. Бояришинов М. Г. Решение системы уравнений Эйлера для установившегося течения идеального газа из точечного источника // Вестник Челябинского ГУ. – 2010. – № 24(205). – Физика. – Вып. 8. – С. 5–8.

M. G. Boyarshinov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Lysva Branch of Perm State Technical University

A. V. Kharchenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Perm State Technical University

D. S. Balabanov, Postgraduate Student, Perm State Technical University

### Transfer and Dispersion by Air Stream of Heated Heavy Gas Emitted by Local Source

The problem of transfer and dispersion of heated heavy gas emitted by local source and mixed with air is formulated. To model the process, Eulerian equation system (continuity, impulse, energy, concentration and state) and appropriate initial and boundary conditions are used. Numerical solution is based on large particles method (Davydov's method). The computational experiment allows researching velocity, density, energy, pressure and concentration field evolution in investigated spatial domain.

**Key words:** gas dynamics, Eulerian equation system, particle-in-cell method.

УДК 536.24.01

С. А. Королев, кандидат физико-математических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет

Д. В. Майков, аспирант, Ижевский государственный технический университет

## ВЛИЯНИЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА ТЕПЛОВЫЙ РЕЖИМ РАБОТЫ БИОГАЗОВОЙ УСТАНОВКИ

Проведено численное моделирование теплообмена биогазовой установки. Выполнен анализ тепловых потерь биогазовой установки в зависимости от температуры окружающей среды и поддерживаемого температурного режима. Проанализирована структура тепловых потерь и эффективность применения мезофильного и термофильного режимов.

**Ключевые слова:** биогаз, метантенк, тепловые потери, мезофильный и термофильный режимы ферментации.

**О**сновные обозначения:  $Q_{\text{сум}}$  – общая энергия получаемого биогаза;  $Q_{\text{пот}}$  – количество теплоты, потребляемое биогазовой установкой;  $Q_{\text{пол}}$  – полезная энергия биогаза;  $Q_{\text{т.п}}$  – тепловые потери в окружающую среду;  $Q_{\text{нагр}}$  – количество теплоты, необходимое для нагрева субстрата до температуры ферментации;  $c$  – удельная теплоемкость;  $m$  – масса;  $T$  – температура;  $R$  – термическое сопротивление теплопередаче;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $\delta$  – толщина слоя;  $\lambda$  – приведенный коэффициент теплопроводности слоя;  $S_i$  – площадь  $i$ -й поверхности метантенка;  $d$  – диаметр метантенка;  $l$  – глубина погружения метантенка в грунт;  $D$  – диаметр расчетной области;  $H$  – глубина расчетной области;  $h$  – шаг разностной сетки;  $M$  и  $N$  – число точек разбиения по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $n$  – номер временного слоя;  $q$  – тепловой поток;  $Y$  – полезный выход биогаза;  $W$  – вместимость метантенка.

Индексы: в – воздух внутри метантенка; с – субстрат; н – воздух снаружи метантенка; в.п – воздушная прослойка; г – газгольдер; б – бетонная стенка;

ут – утеплитель; сн – снежный покров; гр – грунт; р – параметры, характеризующие режим протекания ферментации; 1 – крыша метантенка; 2 – стенки метантенка, расположенные над уровнем грунта; 3 – поверхность метантенка, контактирующая с грунтом.

В настоящее время ведутся активные поиски новых источников энергии. Это связано с истощением запасов ископаемого топлива, темпы добычи которого ускоряются в связи с постоянно растущими потребностями человечества. Положение усугубляется экологическим кризисом, порожденным индустриальной цивилизацией. Одним из способов снижения остроты данных проблем является применение возобновляемых источников энергии, к которым относятся и биогаз.

Получение биогаза актуально и для Удмуртии [1]. Так, масса отходов животноводства составляет более 4,7 млн т/год. Полная переработка данного количества отходов позволяет получить около 261 млн м<sup>3</sup> биогаза в год. При среднем калорийном эквиваленте перевода биогаза в условное топливо 0,716 т у. т. / тыс. м<sup>3</sup> энергетический потенциал отходов животноводства составляет 187 тыс. т у. т. / год.