

УДК 531.37

И. Н. Ефимов, доктор технических наук, профессор, Чайковский технологический институт (филиал) ИжГТУ имени М. Т. Калашникова

Е. А. Морозов, доктор технических наук, профессор, Чайковский технологический институт (филиал) ИжГТУ имени М.Т. Калашникова

К. М. Селиванов, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

ЭКВИАФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Введены бесконечно малые однопараметрические преобразования угловых скоростей для случая свободного вращения твердого тела в пространстве его координат-кватернионов, сохраняющие, соответственно, элементы площадей и объемов. Приведены результаты численного интегрирования уравнений движения.

Ключевые слова: свободное вращение, пространство кватернионов, эквиаффинные преобразования, численные алгоритмы.

Закон изменения проекций угловой скорости $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ в системе координат, центр которой совмещен с центром масс твердого тела, выражается динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3; \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1; \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где I_1, I_2, I_3 – соответствующие главные моменты инерции.

Правые части уравнений (1) для асимметрического волчка суть компоненты векторного поля, заданного на точках пространства R_Ω^3 . Дивергенция поля равна нулю, поэтому из утверждения теоремы Лиувилля [1] следует, что точное решение системы (1) осуществляет преобразование пространства R_Ω^3 , сохраняющее объем. Этот результат дает основание искать алгоритм интегрирования в форме некоторого эквиаффинного преобразования [2, 3]. Поскольку в этом случае будут изменяться все три компоненты угловой скорости, следует ожидать, что алгоритм интегрирования будет иметь вид некоторого параметрического преобразования пространства угловых скоростей $W_1 \times W_2 \times W_3 = R_\Omega^3$, осуществляемого тремя элементарными преобразованиями, определяемыми динамическими уравнениями (1). Однако, как следует из теории [1, 4], на пространствах нечетной размерности подобные структуры не реализуются. В этом случае эквиаффинное преобразование пространства R_Ω^3 можно осуществить с помощью трех последовательных преобразований в координатных

плоскостях $W_1 \times W_2, W_2 \times W_3, W_3 \times W_1$. Всего вследствие некоммутативности операции операторного умножения возможно 216 вариантов таких преобразований, при этом далеко не все из них будут каноническими. Анализ всех вариантов позволяет выделить 14 канонических преобразований, для которых определитель матрицы преобразований равен единице (таблица).

Эквиаффинные алгоритмы интегрирования динамических уравнений Эйлера

Варианты	Сопряженные алгоритмы	Максимальная погрешность, ΔE
1	(1,2,1,3,2,3), (3,2,3,1,2,1)	$3 \cdot 10^{-3}$
2	(1,3,2,1,2,3), (3,2,1,2,3,1)	$2 \cdot 10^{-2}$
3	(2,1,3,1,2,3), (3,2,1,3,1,2)	$2 \cdot 10^{-2}$
4	(1,3,2,3,1,2), (2,1,3,2,3,1)	$4 \cdot 10^{-2}$
5	(2,3,1,2,1,3), (3,1,2,1,3,2)	$4 \cdot 10^{-2}$
6	(2,1,2,3,1,3), (3,1,3,2,2,1)	$5 \cdot 10^{-2}$
7	(1,3,1,2,3,2), (2,3,2,1,3,1)	$5 \cdot 10^{-2}$

Перейдем от дифференциальных уравнений (1) к трем преобразованиям по параметру τ :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_1 + \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 \cdot \tau; \\ \Omega_2 &= \Omega_2 + \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3 \Omega_1 \cdot \tau; \\ \Omega_3 &= \Omega_3 + \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 \cdot \tau. \end{aligned} \quad (2)$$

Будем записывать каждый канонический алгоритм, указывая порядок следования выражений (2); например, запись (1,2,1,3,2,3) обозначает последовательное выполнение операторов

$$(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_1, \Omega_3, \Omega_2, \Omega_3),$$

или

$$\left\{ \begin{aligned} \Omega_1^{(i+1)} &= \Omega_1^{(i)} + \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2^{(i)} \Omega_3^{(i)} \cdot \tau, \\ \Omega_2^{(i+1)} &= \Omega_2^{(i)} + \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3^{(i)} \Omega_1^{(i+1)} \cdot \tau, \\ \Omega_1^{(i+2)} &= \Omega_1^{(i+1)} + \frac{I_2 - I_3}{I_1} \Omega_2^{(i+1)} \Omega_3^{(i)} \cdot \tau, \\ \Omega_3^{(i+1)} &= \Omega_3^{(i)} + \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1^{(i+2)} \Omega_2^{(i+1)} \cdot \tau, \\ \Omega_2^{(i+2)} &= \Omega_2^{(i+1)} + \frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_3^{(i+1)} \Omega_1^{(i+2)} \cdot \tau, \\ \Omega_3^{(i+2)} &= \Omega_3^{(i+1)} + \frac{I_1 - I_2}{I_3} \Omega_1^{(i+2)} \Omega_2^{(i+2)} \cdot \tau. \end{aligned} \right. \quad (3)$$

В таблице приведены эквивалентные алгоритмы численного интегрирования динамических уравнений Эйлера (1) и сопряженные эквивалентные алгоритмы, отличающиеся обратной последовательностью элементарных преобразований.

В сопряженных алгоритмах, за исключением указанных в первой строке таблицы, отклонения значений энергии от начального значения осуществляются в противофазе. Поэтому при численном интегрировании целесообразно последовательно использовать оба сопряженных алгоритма, например, ((1, 3, 2, 1, 2, 3), (3, 2, 1, 2, 3, 1)), и поднять точность счета на порядок, не увеличивая общего количества вычислительных операций.

Перейдем к нахождению устойчивых алгоритмов интегрирования, определяющих абсолютное движение асимметричного волчка в пространстве как функции времени или закона движения. Динамические уравнения Эйлера (1) выражают изменение компонент угловой скорости в системе координат, движущейся с твердым телом XYZ, а закон вращения твердого тела выражает его положение в неподвижной системе координат хуz. Если начала обеих систем совпадают, то кинематическая связь между обеими системами выражается в форме ортогонального преобразования их базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_X \\ \mathbf{e}_Y \\ \mathbf{e}_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Элементы ортогональной матрицы преобразования **A** являются параметрическими функциями времени, вид которых определяется заданием набора координат, достаточного для определения положения тела в пространстве. Для теоретических исследований, исходя из требования минимальности количества координат и вида интегралов движения, используют три угла Эйлера или три навигационных угла [5]. Однако для численного интегрирования такой выбор не всегда корректен вследствие

вырождения кинематических уравнений при некоторых значениях углов. Другим неудобством использования углов Эйлера и навигационных углов является необходимость вычисления большого числа тригонометрических функций. Свободная от этих недостатков система ортогональных преобразований (4) может быть построена на основе использования кватернионов [5].

Пусть H^4 – пространство кватернионов с нормой, равной единице, то есть элементов вида

$$h = h_0 + h_1 \cdot i + h_2 \cdot j + h_3 \cdot k,$$

где h_0, h_1, h_2, h_3 – действительные числа; i, j, k – базисные единицы кватерниона и

$$|h|^2 = h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1.$$

Будем рассматривать элементы h_0, h_1, h_2, h_3 кватерниона в качестве обобщенных координат асимметричного волчка. При этом связь элементов матрицы **A** и элементов кватерниона h , как следует из теории кватернионов, дается соотношениями:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2(h_0^2 + h_3^2) - 1; & a_{21} &= 2(h_2 h_3 - h_0 h_1); & a_{31} &= 2(h_1 h_3 + h_0 h_2); \\ a_{12} &= 2(h_2 h_3 + h_0 h_2); & a_{22} &= 2(h_0^2 + h_2^2) - 1; & a_{32} &= 2(h_1 h_2 - h_0 h_3); \\ a_{13} &= 2(h_1 h_3 - h_0 h_2); & a_{23} &= 2(h_1 h_2 + h_0 h_3); & a_{33} &= 2(h_0^2 + h_1^2) - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть элементы кватерниона являются параметрическими функциями времени, тогда система динамических уравнений, осуществляющая их связь с компонентами угловых скоростей, определяемая уравнениями Эйлера (1), будет иметь вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{dh_0}{dt} &= \frac{1}{2} (\Omega_3 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_1 h_3); \\ \frac{dh_1}{dt} &= \frac{1}{2} (-\Omega_3 h_0 + \Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3); \\ \frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{2} (-\Omega_2 h_0 - \Omega_1 h_1 + \Omega_3 h_3); \\ \frac{dh_3}{dt} &= \frac{1}{2} (-\Omega_1 h_0 + \Omega_2 h_1 - \Omega_3 h_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Правые части уравнений (6) на точках пространства H^4 задают векторное поле, дивергенция которого оказывается равной нулю. Согласно теореме Лиувилля точное решение системы (6) сохраняет объем области, определенный начальными условиями и, следовательно, для данной системы могут быть построены эквивалентные алгоритмы численного интегрирования.

Другим преимуществом пространства кватернионов является его четная размерность, поэтому для него могут быть построены четырехмерные эквивалентные преобразования. Определим на основе динамических уравнений (6) преобразования по параметру τ вида

$$\begin{aligned}
 h_0 &= h_0 + \frac{1}{2}(\Omega_3 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_1 h_3) \cdot \tau; \\
 h_1 &= h_1 + \frac{1}{2}(-\Omega_3 h_0 + \Omega_1 h_2 - \Omega_2 h_3) \cdot \tau; \\
 h_2 &= h_2 + \frac{1}{2}(-\Omega_2 h_0 - \Omega_1 h_1 + \Omega_3 h_3) \cdot \tau; \\
 h_3 &= h_3 + \frac{1}{2}(-\Omega_1 h_0 + \Omega_2 h_1 - \Omega_3 h_2) \cdot \tau.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Изменяя порядок следования операторов, можно задать $4! = 24$ алгоритма интегрирования, однако сохранять объем будут только те, для которых определитель матрицы преобразования будет равен единице.

Аналитическое исследование определителей матриц преобразования приводит к громоздким выражениям, поэтому проще определить эквивалентные алгоритмы численной проверкой всех алгоритмов. Таким образом, только два алгоритма, отличающиеся друг от друга обратным порядком следования операторов, удовлетворяют условию эквивалентности. Запишем их, как и в случае алгоритмов интегрирования уравнения Эйлера, указывая порядок следования операторов (7):

$$(h_0, h_3, h_2, h_1), (h_1, h_2, h_3, h_0). \tag{8}$$

Эквивалентные преобразования (8) задают новое положение твердого тела в пространстве кватернионов H^4 . С помощью (4), (5) можно определить положение базисных векторов системы отсчета, связанной с твердым телом, относительно неподвижной системы отсчета. Полученные преобразования содержат минимальное количество вычислительных операций. Следствием условия эквивалентности преобразования пространства кватернионов является сохранение ортонормированности базиса (e_x, e_y, e_z) в процессе численного интегрирования.

Приведены результаты расчета движения твердого тела в случае Эйлера, полученные на основе эквивалентного преобразования (3) угловых скоростей и первого преобразования (8) пространства кватернионов:

$$(1, 2, 1, 3, 2, 3, h_0, h_3, h_2, h_1). \tag{9}$$

На графике (рис. 1) показано изменение координат орта e_x системы $OXYZ$ относительно неподвижной системы $Oxyz$.

Для контроля устойчивости вычислительного процесса использовалось условие сохранения ортонормированности базисных векторов системы $OXYZ$, а в качестве меры погрешности счета вычислялись функции:

$$\begin{aligned}
 \Delta e_x &= e_x^2 - 1; \quad \Delta e_y = e_y^2 - 1; \quad \Delta e_z = e_z^2 - 1; \\
 \Delta e_{xy} &= e_x e_y; \quad \Delta e_{xz} = e_x e_z; \quad \Delta e_{yz} = e_y e_z.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Изменение функций (10) имеет вид осциллирующий с постоянной максимальной амплитудой, что является

следствием выполнения условия эквивалентности преобразований (9), так график функции Δe_x (рис. 2) иллюстрирует устойчивость алгоритма к накоплению погрешности счета, которая составляет $0(\tau^4)$.

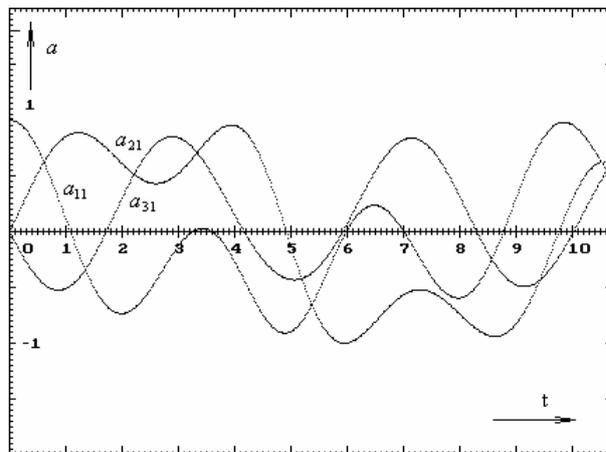


Рис. 1. Изменение координат орта e_x системы $OXYZ$ относительно неподвижной системы $Oxyz$

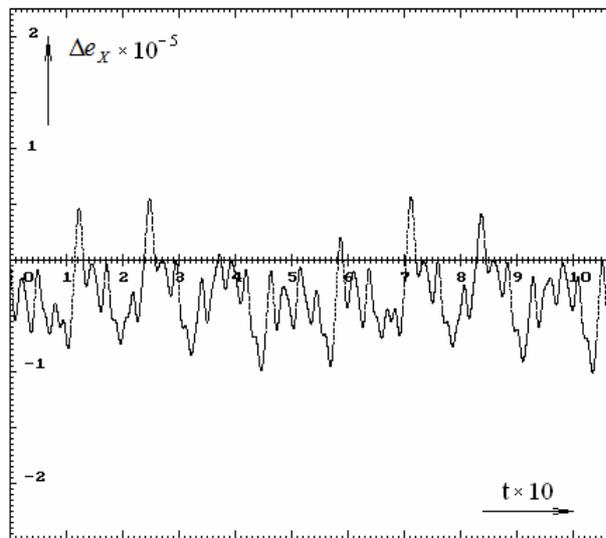


Рис. 2. График функции Δe_x

Численное интегрирование уравнений движения твердого тела в случае Эйлера может быть эффективно выполнено на основе использования эквивалентных преобразований пространства $RH^7 = R_\Omega^3 \times H^4$. Алгоритмы интегрирования, построенные на основе указанных преобразований, имеют третий порядок точности, устойчивы к накоплению погрешности счета, содержат минимально возможное количество арифметических операций, структурно просты, единообразны и включают только операции умножения и сложения.

Библиографические ссылки

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. – М. : Наука. – 1974. – 432 с.

2. Постников М. М. Аналитическая геометрия. – М. : Наука. – 1973. – 752 с.

3. Ефимов И. Н., Морозов Е. А., Жукова, Магафуров В. В. Устойчивые алгоритмы на основе эквивалентных преобразований // Вестник ИжГТУ. – 2013. – № 3(59). – С. 165–167.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М. : Наука. – 1965. – 204 с.

5. Голубев Ю. Ф. Основы теоретической механики. – 2-е изд. – М. : Изд-во МГУ, 2000. – 720 с.

I. N. Efimov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technological Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

E. A. Morozov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technological Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

K. M. Selivanov, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic Institute

Equiaffine Transformations for Asymmetric Top

The paper introduces infinitely small one-parameter transformations of angular velocities of free rotation of a rigid body in the space of its coordinates of quaternions, preserving, respectively, the elements of areas and volumes. The results of numerical integration of equations of motion are given.

Keywords: free rotation, space of quaternions, equiaffine transformations, numerical algorithms.

Получено 05.08.2014

УДК 004.042

Я. М. Далингер, кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ С ТИРАЖИРОВАНИЕМ СООБЩЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ

Приводятся результаты разработки математической модели для расчета характеристик системы с тиражированием обслуживаемых сообщений.

Ключевые слова: поток сообщений, алгоритм тиражирования, обработка информации, математическая модель.

Многим системам обработки информации в иерархических структурах присущ эффект тиражирования обслуживаемых сообщений, когда поступившее элементарное сообщение тиражируется на группу копий, которые обрабатываются и выходят из системы как отдельные сообщения.

Существует большое количество алгоритмов тиражирования, отличающихся моментом появления копий и порядком их обработки в системе. Здесь исследуется алгоритм тиражирования во время обработки, при котором поступившее сообщение проходит несколько этапов обработки, и на каждом этапе создается его копия, покидающая систему как отдельное сообщение.

Разработана математическая модель, дающая возможность вычислять значение основных характеристик системы.

Описание системы

Исследуется система, состоящая из обслуживающего устройства, на вход которого поступает N взаимно независимых пуассоновских потоков элементарных сообщений. Параметр потока номер j – λ_j , ($0 < \lambda_j < \infty$; $j = 1, 2, \dots, N$). Обслуживающее устройство содержит ряд виртуальных устройств, которые выполняют обработку сообщений.

Каждое элементарное сообщение, поступив на обслуживание, проходит последовательную обработку на виртуальных устройствах, соответствующих этапам обработки. Общее число виртуальных устройств (этапов) в системе равно M ($1 \leq M < \infty$). На каждом этапе после обработки создается копия сообщения, которая уходит из системы, образуя выходящий поток сообщений. На последнем этапе элементарное сообщение после обработки уничтожается, а его копия выходит из системы.

Поток номер j имеет параметр

$$\mathbf{x}_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jM}),$$

где $x_{jk} = n$ ($1 \leq n \leq M$) и n – номер виртуального устройства (виртуальной машины), которая обрабатывает сообщение на k -м шаге его обслуживания. Если $x_{jk} = 0$, то это значит, что на шаге k сообщение не обрабатывается ни на одном из виртуальных устройств. Если $x_{jk} = 0$, то $x_{jm} = 0$ для всех $M \geq m > k$.

Таким образом, вектор \mathbf{x}_j задает последовательность обработки сообщения потока j на виртуальных устройствах. Считаем, что для любого j ($1 \leq j \leq N$) $x_{jk} \neq x_{jm}$, если $k \neq m$, $x_{jk} \neq 0$ и $x_{jm} \neq 0$, т. е. на каждом виртуальном устройстве сообщение любого потока обрабатывается не более одного раза.