УДК 512.643

В. П. Егоров, кандидат физико-математических наук, доцент, Череповецкий государственный университет

КОНТРПРИМЕР ДЛЯ ДВУХ ТЕОРЕМ ИЗ ТЕОРИИ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ ИНДЕКСА $k \geq 2$ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассматривается пример неразложимой 4×4-матрицы с комплексными элементами, противоречащий теореме Виландта и теореме о так называемой форме Фрабениуса неразложимых матриц в [2].

Ключевые слова: неразложимые матрицы, индекс импримитивности.

Определение 1

Пусть A – $n\times n$-матрица. Матрица A называется *разложимой*, если либо

(a) $n = 1$ и $A = 0$, либо

(b) $n \geq 2$ и существует $n\times n$-матрица перестановки P и некоторое целое число r, $1 \leq r \leq n-1$, такие, что

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Здесь B – $r\times r$-матрица; D – $(n-r)\times(n-r)$-матрица; C – матрица размера $r\times(n-r)$; 0 – матрица размера $(n-r)\times r$ – нулевая матрица.

Определение 2

Неразложимой называется $n\times n$-матрица A, не являющаяся разложимой.

Определение 3

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m\times n$. Положим $|A| = (|a_{ij}|)$, $M(A) = (\mu_{ij})$, где $\mu_{ij} = 1$, если $a_{ij} \neq 0$ и $\mu_{ij} = 0$ при $a_{ij} = 0$. Матрица $M(A)$ называется *индикаторной матрицей* для A.

Определение 4

Ориентированный граф *сильно связен*, если в нем любые два различных узла P_i, P_j соединены ориентированным путем конечной длины, начинающимся в P_i и кончающимся в P_j.

Теорема 1. Для $n\times n$-матрицы A следующие утверждения эквивалентны:

(a) A неразложима;

(b) $(I + |A|)^{n-1} > 0$;

(c) $(I + M(A))^{n-1} > 0$;

(d) граф $\Gamma(A)$ сильно связен.

Определение 5

Пусть A – неразложимая $n\times n$-матрица и максимальный модуль $\rho(A) = |\lambda_1| \geq 0$ имеют k ее собственных значений. Если $k = 1$, то матрица A называется *примитивной*, если $k \geq 2$, то матрица A называется *импримитивной*. Число $k \geq 2$ называется *индексом импримитивности* матрицы A или просто *индексом* матрицы A.

Рассмотрим 4×4-матрицу A с комплексными элементами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Характеристический многочлен $p_A(t)$ матрицы A записывается в виде

$$p_A(t) = \left(t^2 - \lambda_1^2\right)\left(t^2 - \lambda_2^2\right),$$

поэтому

$$\sigma(A) = \{ \lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, -\lambda_1 \}$$

является спектром матрицы A.

Легко проверить, что при $|\lambda_1| > 0$, $|\lambda_2| > 0$ ориентированный граф $\Gamma(A)$ матрицы A сильно связен и по теореме 1 матрица A является неразложимой.

Если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$, то матрица (1) является неразложимой матрицей индекса $k = 2$. Если $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 0$, то матрица (1) является неразложимой матрицей индекса $k = 4$.

Имеет место следующая теорема Виландта [1].

Теорема 2. Спектр неразложимой матрицы индекса k инвариантен при вращении через $2\pi/k$, но не через положительный угол, меньший чем $2\pi/k$.

Матрица (1) является контрпримером для теоремы 2. В самом деле, если в матрице (1) положить $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 0$ и предположить, что угол между λ_1 и λ_2 не равен $\pi/2$, то матрица (1) будет неразложимой матрицей индекса $k = 4$ и будет противоречить результату теоремы 2.

Приведем так называемую форму Фробениуса неразложимых $n\times n$-матриц индекса $k \geq 2$ [2].

Теорема 3. Пусть A – неразложимая $n\times n$-матрица индекса $k \geq 2$, тогда для некоторой $n\times n$-матрицы перестановки P

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k-1,k} & 0 \\ A_{k,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

k нулевых блоков на главной диагонали квадратные.

Как уже было сказано выше, если $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$, то матрица (1) является неразложимой матрицей индекса $k = 2$ и согласно теореме 3 должна существовать 4×4-матрица перестановки P такая, что P^TAP должна содержать два нулевых квадратных блока на главной диагонали.

Рассмотрим все 24 матрицы перестановки размера 4×4:

$$P_1=I,\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P_5=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad P_6=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_7=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_8=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad P_9=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_{10}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_{11}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_{14}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P_{15}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad P_{16}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_{17}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P_{18}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_{19}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad P_{20}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$P_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad P_{24}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $P_i^T A P_i$, где $i = 1, 2, \ldots, 24$, A – матрица (1):

$$P_1^T A P_1 = IAI = A,\quad P_2^T A P_2=\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_1&0&-\lambda_2&\lambda_2\\ \lambda_1&0&0&0\\ \lambda_1&\lambda_2&-\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_3^T A P_3=\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_1&0&\lambda_2&-\lambda_2\\ \lambda_1&\lambda_2&0&-\lambda_2\\ \lambda_1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_4^T A P_4=\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_1&0&0&0\\ \lambda_1&-\lambda_2&0&\lambda_2\\ \lambda_1&-\lambda_2&\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_5^T A P_5=\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_1&0&-\lambda_2&\lambda_2\\ \lambda_1&0&0&0\\ \lambda_1&\lambda_2&-\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_6^T A P_6=\begin{pmatrix}0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_1&0&0&0\\ \lambda_1&-\lambda_2&0&\lambda_2\\ \lambda_1&-\lambda_2&\lambda_2&0\end{pmatrix},$$

$$P_7^T A P_7=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&\lambda_2&-\lambda_2\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_2&\lambda_1&0&-\lambda_2\\ 0&\lambda_1&0&0\end{pmatrix},\quad P_8^T A P_8=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&-\lambda_2&\lambda_2\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ 0&\lambda_1&0&0\\ \lambda_2&\lambda_1&-\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_9^T A P_9=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&\lambda_2&-\lambda_2\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ \lambda_2&\lambda_1&0&-\lambda_2\\ 0&\lambda_1&0&0\end{pmatrix},$$

$$P_{10}^T A P_{10}=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&0&0\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ -\lambda_2&\lambda_1&0&\lambda_2\\ -\lambda_2&\lambda_1&\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_{11}^T A P_{11}=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&-\lambda_2&\lambda_2\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ 0&\lambda_1&0&0\\ \lambda_2&\lambda_1&-\lambda_2&0\end{pmatrix},\quad P_{12}^T A P_{12}=\begin{pmatrix}0&\lambda_1&0&0\\ \frac{\lambda_1}{3}&0&\frac{\lambda_1}{3}&\frac{\lambda_1}{3}\\ -\lambda_2&\lambda_1&0&\lambda_2\\ -\lambda_2&\lambda_1&\lambda_2&0\end{pmatrix},$$

$$P_{13}^T A P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{14}^T A P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{15}^T A P_{15} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{16}^T A P_{16} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{17}^T A P_{17} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{18}^T A P_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 & \frac{\lambda_1}{3} \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{19}^T A P_{19} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{20}^T A P_{20} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{21}^T A P_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{22}^T A P_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23}^T A P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{24}^T A P_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \lambda_1 \\ \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & \frac{\lambda_1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что в матрице (1) $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$. Ни одна из матриц $P_i^T A P_i$, $i = 1, 2, \ldots, 24$ не содержит двух квадратных нулевых блоков на главной диагонали. Следовательно, при $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ матрица (1) противоречит теореме 3.

В работе [1, теорема II, с. 642] теорема 2 доказана для неотрицательных неразложимых матриц индекса $k \geq 2$. В [2, теорема 1.2, с. 48, теорема 3.1, с. 51] теоремы 2 и 3 доказаны для любых неразложимых матриц индекса $k \geq 2$. Теорема 3 доказана для неотрицательных неразложимых матриц индекса $k \geq 2$ в [3, теорема 2, с. 334-335]. В [4, следствие 8.4.6, с. 601] теорема 2 доказана для неотрицательных неразложимых матриц индекса $k \geq 2$.

Заключение

Матрица (1) является контрпримером для двух теорем в [2, теорема 1.2, с. 48, теорема 3.1, с. 51].

Библиографические ссылки

1. *Wielandt H.* Unzerlegbare nicht negative Matrizen. – Math. Z. –1950. – 52. – S. 642–648.
2. *Minc H.* Nonnegative Matrices. – New York : Berlin Press, 1988. – 206 pp.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
4. *Хорн Р.*, *Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М. : Мир, 1989, – 655 с.

V. P. Egorov, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Cherepovets State University

Counterexample for Two Theorems from the Theory of Irreducible Matrices of Imprimitivity Index *k≥2* with Complex Elements

An example of irreducible 4×4-matrix with complex elements, discordant to Wielandt theorem and theorem of so called Frobenius form of irreducible matrices in [2] is considered in the paper.

Keywords: irreducible matrices, index of imprimitivity.

Получено 15.10.2014