МАТЕМАТИКА

УДК 519.62/64

С. В. Спиридонов, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
О. Н. Ключникова, Чайковский технологический институт (филиал) Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ВЫСОТНЫХ ЗДАНИЙ

Важнейшим этапом при проектировании высотных зданий и сооружений является определение нагрузок на здание. Основное внимание уделяется определению реакции здания на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки.

Ключевые слова: высотные здания, пульсационная составляющая ветровой нагрузки, уравнение Лагранжа, обобщенные координаты.

Согласно нормативным документам [1] ветровая нагрузка на конструкции высотных зданий состоит из статической и пульсационной. Основные этапы расчета зданий на пульсационную составляющую ветра разработаны в середине прошлого века. Однако вопросы, связанные с определением динамической составляющей ветровой нагрузки, остаются актуальными [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Методика Барштейна М. Ф. [4], разработанная до 80-го года прошлого столетия, является одной из наиболее развитых в настоящее время. В дальнейшем исследованием в области расчета ветровых нагрузок занимался Попов Н. А. [3], который дал рекомендации по уточненному динамическому расчету зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки.

Методика реализована в ПК MicRoFe, разработчиками mbSoft-WareAG и Еврософт и позволяет создавать адекватные расчетные схемы сложных строительных конструкций и практически реализовывать методы структурного анализа их работы и поведения при различных воздействий, в том числе динамических.

Зарубежные исследователи Симму Э., Сканлан Р. [2] и ряд других [4] рассматривали вопросы, связанные с воздействием ветровых нагрузок на здания и сооружения, без учета современных представлений о природе ПВ-нагрузок, данных натурных и модельных исследований. Предлагаемые ими расчетные соотношения представлены в той или иной степени в упрощенном виде.

По мнению Попова Н. А. и других российских ученых существующая методика определения пульсационной составляющей ветровой нагрузки, изложенная в работах [1, 2], является применимой для достаточно узкого класса в основном симметричных зданий и сооружений. Соотношения, описывающие динамическую реакцию сооружения при действии ветра, упрощены и вносят в расчеты определенные погрешности.

Действительно, при определении пульсационной составляющей ветровой нагрузки на высотные здания согласно [1] расчетные сочетания реакций от ветрового воздействия определяются по формуле

$$x = x_{\text{стат}} + x_{\text{пульс}} = x_{\text{стат}} + \sqrt{\sum_{j=1}^{r} x^2_{\text{с.формы}}}, \qquad (1)$$

где r – количество учитываемых собственных форм; x – значение реакции.

В основу расчета пульсационной составляющей ветровой нагрузки положен принцип замены динамического расчета статическим на эквивалентную нагрузку с учетом динамических параметров – коэффициентов динамичности, пульсации и корреляции пульсации. В общем виде пульсационная составляющая определяется по формуле

$$W_{\text{пульс}} = m \cdot \xi \cdot \eta \cdot y, \qquad (2)$$

где m – масса сооружения на определенном уровне z; ξ – коэффициент динамичности; y – горизонтальное перемещение сооружения на этом же уровне z; η – приведенное ускорение,

$$\eta = \sum_{k=1}^{r} y_k \cdot W_{pk} \Big/ \sum_{k=1}^{r} y_k^2 \cdot M_k, \qquad (3)$$

где $W_{pk} = W_{\text{стат}} \cdot \zeta \cdot \nu$ – нагрузка на k-участке; $W_{\text{стат}}$ – статическая составляющая ветровой нагрузки; ζ – коэффициент пульсации давления ветра; ν – коэффициент пространственной корреляции пульсаций давления ветра.

В некоторых случаях для расчета сооружений, имеющих плотный спектр частот, необходимо учитывать не только вклад собственных форм колебаний, но и вклад взаимных корреляций между формами. В нормативной литературе [1] взаимная корреляция по формам собственных колебаний не учитывается, и коэффициенты динамичности и кор-

Получено 19.10.11

реляции пульсации скорости ветра по пространству даны по 1-й форме собственных колебаний, а для остальных форм эти коэффициенты равны единице.

Из вышеизложенного следует, что расчет по нормам не в полной мере отвечает действительной работе высотных зданий, особенно несимметричных, на действие статической и пульсационной составляющей ветрового воздействия.

Рассмотрим некоторые предложения по разработке методики расчета высотных зданий на ветровую нагрузку для несимметричных высотных зданий, которая базируется на методике Барштейна М. Ф. [4].

При определении динамических реакций (перемещений и усилий) системы целесообразно ввести обобщенные координаты $\rho_s(t)$, соответствующие полному разделению неизвестных в уравнениях колебаний линейной системы [1]. Величины $\rho_s(t)$ определяют вклад каждой s-й формы в общее перемещение в точке j, т. е.

$$y_j\left(z,t\right)=\sum_{S=1}^{n}\rho_s(t)_s(z_j). \qquad (4)$$

Учитывая ортогональность собственных форм, имеем последовательность уравнений Лагранжа:

$$\ddot{\rho}_s(t)+\gamma\cdot\omega_s\cdot\dot{\rho}_s(t)+\omega_s^2\cdot\rho_s(t)=\left\lfloor Q_s(t)\right\rfloor\Big/\left\lfloor M_s^{\text{об}}\right\rfloor, \qquad (5)$$

где $Q_s(t)=\sum\limits_{j=1}^{r}\rho_j(t)\cdot\alpha_s(z_j)$ – обобщенная сила для s-й формы; $M_s^{\text{об}}=\sum\limits_{j=1}^{r}M_j\cdot\alpha_s^2(z_j)$ – обобщенная масса для s-й формы; r – общее количество точек.

Средний квадрат перемещений j-й точки равен:

$$\overset{-2}{y}_j(t)=\sigma_j^2=\sum_{l=1}^{n}\sum_{S=1}^{n}\overline{\rho_s(t)\cdot\rho_l(t)}\cdot\alpha_s(z_j)\cdot\alpha_l(z_j). \qquad (6)$$

В выражении (5) ковариация обобщенных координат определяется по формуле

$$\overline{\rho_s(t)\cdot\rho_l(t)}=\pi^{-1}\cdot\int_0^{\infty}\Phi_s\left(-i\omega-\right)\cdot S_{Q_sQ_l}(\omega)d\omega, \qquad (7)$$

где s,l – формы собственных колебаний высотного здания; $\Phi_s(i\omega)\Phi_l\left(-i\omega-\right)$ – произведение самосопряженных передаточных функций системы; $S_{Q_sQ_l}\left(\omega a\right)$ – взаимная спектральная плотность обобщенных сил.

Подробный вывод решения уравнения (5) через передаточную функцию системы и взаимную спектральную плотность обобщенных сил представлен в работе [4]. Здесь приводится окончательное значение среднего квадрата перемещений j-й точки:

$$\overset{-2}{y}_j(t)=\frac{2}{3}\cdot\sum_{S=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\frac{\alpha_s(z_j)\cdot\alpha_l(z_j)}{M_s\cdot M_j\cdot\omega_s^2\cdot\omega_l^2}\cdot G_{Sl}, \qquad (8)$$

где G_{Sl} – обобщенное динамическое воздействие, определяющееся по формуле

$$G_{Sl}=$$
$$=\frac{J(\varepsilon)\varepsilon^{11/3}\left[\varepsilon^4-\left(\varepsilon_s^2+\varepsilon_l^2-\gamma\varepsilon_s\varepsilon_l\right)\varepsilon^2+\varepsilon_s^2\varepsilon_l^2\right]d\varepsilon}{\left(1+\varepsilon^2\right)^{4/3}\left[\varepsilon^4-2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\varepsilon_s^2\varepsilon^2+\varepsilon_s^4\right]\cdot\left[\varepsilon^4-2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\varepsilon_l^2\varepsilon^2+\varepsilon_l^4\right]}, \qquad (9)$$

где $\varepsilon=\left[V_0\right]/\left[1200\cdot f\right]$ – безразмерный период (с индексами s и l – собственный период колебаний); V_0 – скорость ветра на высоте 10 м; f – частота колебания; $J\left(\varepsilon\right)=\sum\limits_{j=1}^{r}\sum\limits_{k=1}^{r}P_H(z_j)\cdot P_H(z_k)\cdot\alpha_s(z_j)\cdot\alpha_l(z_k)\times$ $\times\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\chi_x}{60}+\frac{\chi_y}{150}+\frac{\chi_z}{150}\right)\right]$ – квадрат модуля аэродинамической передаточной функции здания.

Сделаем предположения, что скорость ветра полностью коррелированна по высоте сооружения, т. е. представляет произведение случайной функции времени на функцию координат, тогда квадрат перемещения сооружения на уровне z имеет вид [1]

$$\overset{-2}{y}_j(t)=\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}\eta_{zl}\cdot\xi_l}{\omega_l^4}. \qquad (10)$$

Таким образом, необходимо определять квадрат перемещения сооружения с учетом корреляционной взаимосвязи между собственными формами по формуле

$$\overset{-2}{y}_z(t)=\frac{\sum\limits_{S=1}^{n}\sum\limits_{l=1}^{n}\eta_{zS}\cdot\eta_{zl}\cdot\xi_S\cdot\xi_l}{\omega_S^2\cdot\omega_l^2}\cdot\nu^2\cdot\mu_{Sl}, \qquad (11)$$

$$\eta_{zs}=\alpha_{zs}\frac{\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{ks}\cdot P_H^{CT}\left(k\right)\cdot\zeta\left(k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{ks}^2\cdot m_k};$$

$$\eta_{zl}=\alpha_{zl}\frac{\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{kl}\cdot P_H^{CT}\left(k\right)\cdot\zeta\left(k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_{kl}^2\cdot m_k}$$ – приведенное ускорение на уровне z для s-й и l-й форм собственных колебаний; $P_{\text{Н}}\left(z_j\right)=2\cdot P_{\text{Н}}^{\text{СТ}}\left(z_j\right)\cdot\gamma_T\left(z_j\right)$ – нормальное значение давлений от пульсации на отметке z_j; $\gamma_T\left(z_j\right)$ – интенсивность турбулентности на этой же отметке; $\xi_s\cdot\xi_l$ – произведение коэффициентов динамичности по s-й и l-й собственным формам свободных колебаний;

$$\xi_s \xi_l = \frac{2}{3} \times$$
$$\times \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{11/3}\left[\varepsilon^4 - \left(\varepsilon_s^2 + \varepsilon_l^2 - \gamma\varepsilon_s\varepsilon_l\right)\varepsilon^2 + \varepsilon_s^2\varepsilon_l^2\right]d\varepsilon}{(1+\varepsilon)^{4/3}\left[\varepsilon^4 - 2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\varepsilon_s^2\varepsilon^2 + \varepsilon_s^4\right]\cdot\left[\varepsilon^4 - 2\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\varepsilon_l^2\varepsilon^2 + \varepsilon_l^4\right]}. \quad (12)$$

Здесь μ_{sl} – коэффициент корреляции по s-й и l-й формам собственных колебаний. Вычислим коэффициент μ_{sl} по формуле

$$\mu_{sl} = \left[\overline{\rho_s(t)\cdot\rho_l(t)}\right] \Big/ \left[\overset{*}{\rho}_s(t)\cdot\overset{*}{\rho}_l(t)\right]. \quad (13)$$

Здесь

$$\overset{*}{\rho}_s(t) = \left\{\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{11/3}\left[\varepsilon^4 - \varepsilon_s^2\left(2-\gamma^2\right)\varepsilon^2 + \varepsilon_s^4\right]d\varepsilon}{\left(1+\varepsilon^2\right)^{4/3}\cdot\left[\varepsilon^4 - 2\left(1-0{,}5\gamma^2\right)\varepsilon_s^2\varepsilon^2 + \varepsilon_s^4\right]}\right\}^{0,5}, \quad (14)$$

$$\overset{*}{\rho}_l(t) = \left\{\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{11/3}\left[\varepsilon^4 - \varepsilon_l^2\left(2-\gamma^2\right)\varepsilon^2 + \varepsilon_l^4\right]d\varepsilon}{\left(1+\varepsilon^2\right)^{4/3}\left[\varepsilon^4 - 2\left(1-0{,}5\gamma^2\right)\varepsilon_l^2\varepsilon^2 + \varepsilon_l^4\right]}\right\}^{0,5}. \quad (15)$$

В формулах (14) и (15) ω_s^2, ω_l^2 – квадраты угловых частот по s-й и l-й формам собственных колебаний; ν – коэффициент пространственной корреляции пульсации давления ветра.

Согласно [1] коэффициент пространственной корреляции равен

$$\nu = \frac{\overline{\rho_1^2(t)}}{\rho_1^*(t)\cdot\rho_1^*(t)}, \quad (16)$$

где $\overline{\rho_1(t)}$ – обобщенная координата системы с учетом корреляции пульсации скорости; $\rho_1^*(t)$ – обобщенная координата системы с учетом полной корреляции.

Из [2] известно, что при использовании рядов и интегралов Фурье спектр ускорений можно представить через спектр перемещений:

$$\overline{\ddot{y}_z^2(t)} = \omega^4 \cdot \overline{y}_z^2(t). \quad (17)$$

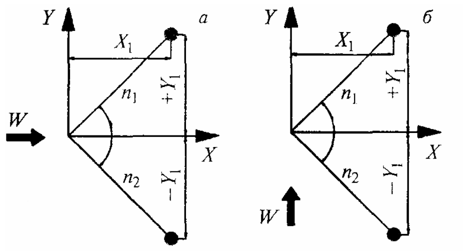
После умножения ускорения по формуле (17) на массу получим формулу для определения динамической составляющей ветровой нагрузки на каждом участке z с учетом всех собственных форм и их корреляции между собой:

$$W_{\text{пульс}} = m_z \cdot \nu \cdot \sqrt{\sum_{S=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \eta_{zS}\cdot\eta_{zl}\cdot\xi_S\cdot\xi_l\cdot\mu_{Sl}}. \quad (18)$$

Формула суммирования расчетных сочетаний реакций примет вид [5]

$$X = X_{\text{стат}} + X_{\text{пульс}} = X_{\text{стат}} + \sqrt{\sum_{S=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} X_s\cdot X_l\cdot\mu_{Sl}}. \quad (19)$$

Преимуществом выражения (19) по сравнению с (1) является отсутствие в процессе суммирования эффекта «гашения» знака модальных компонент, что в некоторых случаях приводит к недоразумениям. Типичным примером такой ситуации может служить случай суммирования реакции по кратным частотам (см. рис.). Например, вертикально расположенный консольный стержень с одинаковыми главными жесткостями поперечного сечения имеет кратные формы собственных колебаний n_1 и n_2 (см. рис.) [5].



Кратные частоты

Сформулируем правила, которыми необходимо пользоваться при определении пульсационной составляющей ветровой нагрузки для несимметричных высотных зданий и сооружений.

1. Расчетные сочетания реакций от ветрового воздействия следует определять, используя выражение (19).

2. При суммировании реакции сооружения по кратным частотам вследствие осцилляции значения реакций модальных компонент кратных частот на каждом ярусе сооружения в направлении ветрового потока следует учитывать с одинаковыми знаками.

3. Знак реакции динамической составляющей по отношению к статической составляющей должен выбираться из условия возникновения наиболее неблагоприятного напряженно-деформированного состояния в элементах конструкции сооружения.

Таким образом, при определении пульсационной составляющей ветровой нагрузки для высотных зданий с достаточно сложным аэродинамическим профилем необходимо учитывать знак реакции динамической составляющей по отношению к статической, а также при суммировании реакции по формам собственных колебаний пользоваться выражением (19).

Следует отметить, что несимметричность формы при некоторых углах атаки ветровым потоком по отношению к оси потока требует более детального изучения аэродинамики высотных зданий и сооружений.

Библиографические ссылки

1. СП 20.13330.2011 СНиП 2.01.07–85*. Нагрузки и воздействия : С картами (Актуализированная версия). – М. : Стройиздат, 2011.

2. *Симиу Э.*, *Сканлан Р.* Воздействие ветра на здания и сооружения / под ред. Б. Е. Маслова. – М. : Стройиздат, 1984. – 360 с.

3. *Попов Н. А.* Рекомендации по уточнению расчета зданий и сооружений на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки. – М. : ЦНИИСК, 2000. – 44 с.

4. *Барштейн М. Ф.* Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М. : Стройиздат, 1978. – 216 с.

5. *Чернышев Д. Д.* Развитие методики расчета башенных сооружений с пакетами вытяжных труб на ветровую нагрузку // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 3. – С. 74–80.

6. *Кашеварова Г. Г.*, *Труфанов Н. А.* Численное моделирование деформирования и разрушения системы «здание – фундамент – основание». – Екатеринбург ; Пермь : УрО РАН, 2005. – 225 с.

7. *Кашеварова Г. Г.*, *Пермякова Т. Б.* Численные методы решения задач строительства на ЭВМ : учеб. пособие. – Пермь, 2003. – 352 с.

S. V. Spiridonov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
O. N. Kluchnikova, Chaikovsky Technological Institute, Branch of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Definition of a Dynamic Wind Force Component for Asymmetrical High-Rise Buildings

The major stage at designing of high-rise buildings and constructions is a definition of loadings on a building. The basic attention is given in the article to definition of reaction of a building on action of a variable wind load.

Key words: high-rise buildings, variable wind loading component, Lagrange equation, generalized coordinates.

УДК 519.652

М. Н. Истомина, аспирант, Сыктывкарский государственный университет

ОРБИТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП В СИСТЕМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ И ЖЕСТКИХ ФРЕЙМАХ

Доказывается, что всякая система Мерседес-Бенц является орбитой циклической группы. Кроме того, рассматриваются циклические группы, состоящие из m ортогональных матриц $\{I, P, P^2, ..., P^{m-1}\}$, *где* $m \geq n+1$. *Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых орбита данной циклической группы является жестким фреймом.*

Ключевые слова: системы Мерседес-Бенц, орбиты циклических групп, жесткие фреймы.

1°. Напомним [2, 3], что набор единичных векторов $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ из $\mathbf{R}^n$ называется *системой Мерседес-Бенц*, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\frac{1}{n} \text{ при } i \neq j. \quad (1)$$

Из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = \mathbf{O}. \quad (2)$$

Действительно,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i, \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle =$$
$$= n+1+n(n+1)\left(-\frac{1}{n}\right) = O.$$

Система Мерседес-Бенц является жестким фреймом, поэтому для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо разложение

$$x = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i. \quad (3)$$

Каждая система Мерседес-Бенц получается из канонического фрейма Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \dots, b_{n+1}^n\}$ с помощью ортогонального преобразовния. Для канонического фрейма в [1] установлено циклическое свойство. Далее будет показано, что аналогичным свойством обладают все системы Мерседес-Бенц.

Теорема 1. Для любой системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ в $\mathbf{R}^n$ найдется ортогональная матрица P порядка n такая, что

1) $P\varphi_i = \varphi_{i+1}$, $i \in 1:n$; $P\varphi_{n+1} = \varphi_1$;

2) $P^{n+1} = I$, где I – единичная матрица n-го порядка;

3) единица не является собственным числом матрицы P.

Доказательство

1) В силу (1) системы единичных векторов $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ и $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$, где $\psi_i = \varphi_{i+1}$, удовлетворяют условию $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ при всех $i, j \in 1:n$. В этом случае, как показано в [3], существует ортогональная матрица P такая, что $\psi_i = P\varphi_i$, $i \in 1:n$. Это значит, что

$$\varphi_{i+1} = P\varphi_i, \text{ при } i \in 1:n. \quad (4)$$

Получено 26.10.11