4. *Барштейн М. Ф.* Руководство по расчету зданий и сооружений на действие ветра. – М. : Стройиздат, 1978. – 216 с.

5. *Чернышев Д. Д.* Развитие методики расчета башенных сооружений с пакетами вытяжных труб на ветровую нагрузку // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 3. – С. 74–80.

6. *Кашеварова Г. Г.*, *Труфанов Н. А.* Численное моделирование деформирования и разрушения системы «здание – фундамент – основание». – Екатеринбург ; Пермь : УрО РАН, 2005. – 225 с.

7. *Кашеварова Г. Г.*, *Пермякова Т. Б.* Численные методы решения задач строительства на ЭВМ : учеб. пособие. – Пермь, 2003. – 352 с.

S. V. Spiridonov, Doctor of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
O. N. Kluchnikova, Chaikovsky Technological Institute, Branch of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Definition of a Dynamic Wind Force Component for Asymmetrical High-Rise Buildings

The major stage at designing of high-rise buildings and constructions is a definition of loadings on a building. The basic attention is given in the article to definition of reaction of a building on action of a variable wind load.

Key words: high-rise buildings, variable wind loading component, Lagrange equation, generalized coordinates.

УДК 519.652

М. Н. Истомина, аспирант, Сыктывкарский государственный университет

ОРБИТЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП В СИСТЕМАХ МЕРСЕДЕС-БЕНЦ И ЖЕСТКИХ ФРЕЙМАХ

Доказывается, что всякая система Мерседес-Бенц является орбитой циклической группы. Кроме того, рассматриваются циклические группы, состоящие из m ортогональных матриц $\{I, P, P^2, ..., P^{m-1}\}$, *где* $m \geq n+1$. *Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых орбита данной циклической группы является жестким фреймом.*

Ключевые слова: системы Мерседес-Бенц, орбиты циклических групп, жесткие фреймы.

1°. Напомним [2, 3], что набор единичных векторов $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ из $\mathbf{R}^n$ называется *системой Мерседес-Бенц*, если

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = -\frac{1}{n} \text{ при } i \neq j. \tag{1}$$

Из определения следует, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i = \mathbf{O}. \tag{2}$$

Действительно,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_i, \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \|\varphi_i\|^2 + \sum_{i \neq j} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle =$$
$$= n + 1 + n(n+1)\left(-\frac{1}{n}\right) = O.$$

Система Мерседес-Бенц является жестким фреймом, поэтому для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо разложение

$$x = \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \langle x, \varphi_i \rangle \varphi_i. \tag{3}$$

Каждая система Мерседес-Бенц получается из канонического фрейма Мерседес-Бенц $\{b_1^n, \ldots, b_{n+1}^n\}$ с помощью ортогонального преобразовния. Для канонического фрейма в [1] установлено циклическое свойство. Далее будет показано, что аналогичным свойством обладают все системы Мерседес-Бенц.

Теорема 1. Для любой системы Мерседес-Бенц $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}\}$ в $\mathbf{R}^n$ найдется ортогональная матрица P порядка n такая, что

1) $P\varphi_i = \varphi_{i+1}$, $i \in 1:n$; $P\varphi_{n+1} = \varphi_1$;

2) $P^{n+1} = I$, где I – единичная матрица n-го порядка;

3) единица не является собственным числом матрицы P.

Доказательство

1) В силу (1) системы единичных векторов $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ и $\{\psi_1, ..., \psi_n\}$, где $\psi_i = \varphi_{i+1}$, удовлетворяют условию $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \psi_i, \psi_j \rangle$ при всех $i, j \in 1:n$. В этом случае, как показано в [3], существует ортогональная матрица P такая, что $\psi_i = P\varphi_i$, $i \in 1:n$. Это значит, что

$$\varphi_{i+1} = P\varphi_i, \text{ при } i \in 1:n. \tag{4}$$

Получено 26.10.11

Далее, согласно (2), $\varphi_{n+1} = -(\varphi_1 + ... + \varphi_n)$. Учитывая (4), приходим к равенству

$$P\varphi_{n+1} = -(\varphi_2 + ... + \varphi_{n+1}) = \varphi_1.$$

2) Имеем $\varphi_k = P^{k-1}\varphi_1$ при $k \in 1:n+1$. При тех же k

$$P^{n+1}\varphi_k = P^k\left(P^{n+1-k}\varphi_k\right) =$$
$$= P^k\left(P^n\varphi_1\right) = P^k\varphi_{n+1} = P^{k-1}\varphi_1 = \varphi_k.$$

На основании (3) получаем $P^{n+1}x = x \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что $P^{n+1} = I$.

3) Допустим, что вопреки утверждению существует ненулевой вектор x_0 такой, что $Px_0 = x_0$. Введем матрицу $Q = I + P + P^2 + ... + P^n$. Имеем:

$$Qx_0 = (n+1)x_0 \neq \mathbf{O}. \tag{5}$$

Вместе с тем, согласно 2), $QP = Q$. Значит, и $QP^{k-1} = Q$ при $k \in 1:n+1$. В силу 1) и 2) при тех же k

$$Q\varphi_k = QP^{k-1}\varphi_1 = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{n+1} = \mathbf{O}.$$

На основании (3) получаем $Qx = \mathbf{O} \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что Q – нулевая матрица. В частности $Qx_0 = \mathbf{O}$, что противоречит (5).

Теорема доказана.

2°. Множество матриц $G = \{I, P, P^2, \ldots, P^n\}$ образует группу по умножению. Действительно, $P^kP^s = P^l$, где $l = \langle k+s \rangle_{n+1}$ – остаток от деления $k+s$ на $n+1$. Единицей в группе G является единичная матрица I. Обратные элементы определяются так:

$$I^{-1} = I; \ \left(P^k\right)^{-1} = P^{n+1-k}, \ k \in 1:n.$$

Свойство 2) характеризует группу как циклическую.

Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ множество векторов $\{Tx\}_{T \in G}$ называется *орбитой* группы G. При $x = \varphi_1$ орбита состоит из векторов $\{\varphi_1, P\varphi_1, ..., P^n\varphi_1\} = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n+1}\}$, то есть при $x = \varphi_1$ орбитой группы G является система Мерседес-Бенц.

3°. Пусть m – натуральное число, $m \geq n+1$, P – ортогональная матрица размера $n \times n$, удовлетворяющая условию $P^m = I$. Тогда собственные числа матрицы P являются корнями степени m из единицы.

Набор матриц $\{I, P, P^2, \ldots, P^{m-1}\}$ является циклической группой. Возьмем единичный вектор φ_0 и положим $\varphi_k = P^k\varphi_0$, $k \in 1:m-1$. При каких условиях на матрицу P орбита группы $\{\varphi_0, ..., \varphi_{m-1}\}$ будет жестким фреймом? Напомним, что система называется жестким фреймом, если выполнено тождество

$$x = \frac{n}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\langle x, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Теорема 2. Пусть P – ортогональная матрица и $P^m = I$. Для того чтобы система векторов $\{\varphi_0, P\varphi_0, P^2\varphi_0, \ldots, P^{m-1}\varphi_0\}$, где $\|\varphi_0\| = 1$, была жестким фреймом, необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы P были попарно различны (простые собственные числа), а соответствующие ортонормированные собственные векторы $v_1, \ldots, v_n$ удовлетворяли условию

$$\left|\langle \varphi_0, v_j \rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \ j \in 1:n.$$

Доказательство проводится по той же схеме, что и в [4].

Библиографические ссылки

1. *Малоземов В. Н.*, *Соловьева Н. А.* Циклическое свойство фрейма Мерседес-Бенц // Семинар <<DHA & CAGD>>. Избранные доклады. 12 сентября 2009 г. – URL: http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0912
2. *Малоземов В. Н.*, *Певный А. Б.* Фрейм Мерседес-Бенц в *n*-мерном пространстве // Семинар <<DHA & CAGD>>. Избранные доклады. 16 января 2007 г. – URL: http://dha.spb.ru/reps07.shtml#0116
3. *Малоземов В. Н.*, *Певный А. Б.* Равноугольные жесткие фреймы // Проблемы матем. анализа. – Вып. 39. – 2009. – С. 3–25.
4. *Малоземов В. Н.* Циклические фреймы // Семинар <<DHA & CAGD>>. Избранные доклады. 21 января 2009 г. – URL: http://dha.spb.ru/reps09.shtml#0121

M. N. Istomina, Postgraduate Student, Syktywkar State University

Cyclic Group Orbits in Mercedes-Benz Systems and Tight Frames

The author proves that the Mercedes-Benz systems in $\mathbf{R}^n$ *are the orbit of cyclic group* $\{I, P, P^2, ..., P^n\}$ *where P is an orthogonal matrix with property* $P^{n+1} = I$.

Key words: Mercedes-Benz systems, cyclic group orbits, tight frames.