N. I. Kalyadin, Candidate of Technical Sciences, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
D. N. Sandalov, Postgraduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Calculating of Multifractal Dimension in Synthesized Spectrum of Structural Relations

The computational algorithm for multifractal dimension spectrum of the synthesized structural relationships between logical operators in the formula representation of Boolean functions is proposed.

Key words: spectrum of structural relations, multifractal dimension.

УДК 517.988

В. Ю. Митин, аспирант, Пермский государственный национальный исследовательский университет

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ, В КОТОРОМ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА ПУАНКАРЕ ОСОБОЙ ТОЧКИ ПЛОСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ ЕГО ЛИНЕЙНОЙ И КВАДРАТИЧНОЙ ЧАСТЯМИ

Рассмотрен случай, при котором возможно сведение вычисления индекса нулевой изолированной особой точки плоского векторного поля с ненулевой вырожденной производной Фреше к аналогичной задаче для полиномиального векторного поля.

Ключевые слова: индекс Пуанкаре, вращение, плоское векторное поле.

Постановка задачи

Пусть Φ – векторное поле, удовлетворяющее требованиям ($T_1 - T_5$):

T_1. Векторное поле Φ плоское, причем $\Phi(\theta)=\theta$, где θ – нулевой вектор.

T_2. Векторное поле Φ представимо в виде

$$\Phi(z)=\Phi(\theta)+\Phi'(\theta)z+\frac{\Phi''(\theta)z^2}{2!}+\omega_2(z),$$

где $\omega_2(z)=o(\|z\|^2)$. Для выполнения этого требования достаточно, чтобы вторая производная Фреше $\Phi''(z)$ была равномерно непрерывна в некоторой окрестности точки θ [1, с. 491].

T_3. θ – изолированная особая точка векторных полей Φ и Φ_2, где $\Phi_2(z)=\Phi(\theta)+\Phi'(\theta)z+\dfrac{\Phi''(\theta)z^2}{2}$.

T_4. Первой производной Фреше векторного поля Φ соответствует ненулевая вырожденная матрица A (т. е. A – матрица ранга 1).

T_5. Имеет место «неколлинеарный» случай (см. [2]), т. е. векторы $Kz^*=K(-z^*)$ и Lz неколлинеарны при $z\notin\{z^*,-z^*\}$, где z^* и $-z^*$ – нули оператора L на границе любого замкнутого круга $\overline{B_{\theta,r}}$ с центром в нуле и достаточно малого радиуса r, при котором θ – единственная особая точка поля Φ в $\overline{B_{\theta,r}}$. Из условия T_4 следует, что $\dim(KerL)=1$, т. е. множество нулей векторного поля L образует прямую, проходящую (согласно требованию T_1) через точку θ. Эта прямая пересекает все рассматриваемые круги $\overline{B_{\theta,r}}$ в двух диаметрально противоположных точках z^* и $-z^*$.

Покажем, что при совместном выполнении требований ($T_1 - T_5$) индекс Пуанкаре нулевой особой точки определяется только линейной (L) и квадратичной (K) частями векторного поля Φ и не зависит от остатка ω_2. Определение индекса, его свойства, методы вычисления в ряде частных случаев, а также разнообразные приложения данной теории изложены, например, в работах [3, 4].

Доказательство теорем

Теорема 1. Если выполнены условия ($T_1 - T_5$), то на окружностях достаточно малых радиусов справедлива оценка нормы вида

$$\|\Phi_2 z\|\geq\alpha\|z\|^2,$$

где $\alpha>0$.

Доказательство. Пусть векторы Lz и Kz^* неколлинеарны при $z\notin\{z^*,-z^*\}$. Тогда

$$|\cos(Lz,Kz^*)|\neq 1\Leftrightarrow(\exists\varepsilon\in(0,1)):|\cos(Lz,Kz^*)|\leq 1-2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$(\exists\varepsilon\in(0,1)):\frac{Lz\cdot Kz^*}{\|Lz\|\|Kz^*\|}\leq 1-2\varepsilon. \tag{1}$$

Заметим, что направления векторов Lz и Kz (а значит, и угол между ними) не зависят от радиуса окружности и принимают постоянное значение на каждом луче, выходящем из точки θ, поэтому можно рассматривать любую окружность, не содержащую особых точек. Из непрерывности оператора K и того, что $\|Kz^*\|>0$ следует, что $\|Kz\|>0$ в некоторой окрестности U_{11} по углу наклона φ луча, соответствующего точке z^*. Из непрерывности функции в левой части неравенства (1) следует, что в некоторой

Получено 28.12.11

окрестности U_{12} по углу наклона φ луча, соответствующего точке z^*, справедливо неравенство

$$\frac{Lz \cdot Kz}{\|Lz\|\|Kz\|} \le 1-\varepsilon \ (z \in U_{12}).$$

1. Пусть $U_1 = U_{11} \cap U_{12}$. Тогда в окрестности U_1 выполняются оба неравенства.

Рассмотрим дугу U_1, содержащую точку z^*. Для нормы оператора Φ_2 имеем следующую оценку:

$$\|\Phi_2(z)\|^2 = \|Lz+Kz\|^2 = (Lz+Kz)\cdot(Lz+Kz) =$$
$$= \|Lz\|^2 + 2\|Lz\|\cdot\|Kz\|\cos\varphi + \|Kz\|^2 \ge \|Lz\|^2 -$$
$$-\ 2\|Lz\|\cdot\|Kz\||\cos\varphi| + \|Kz\|^2 \ge \|Lz\|^2 -$$
$$-\ 2\|Lz\|\cdot\|Kz\|(1-\varepsilon) + \|Kz\|^2 = \|Kz\|^2(1-2t(1-\varepsilon)+t^2),$$

где $\|Lz\| = t\|Kz\|$. Рассмотрим квадратичную функцию: $g(t) = 1-2t(1-\varepsilon)+t^2, t>0.$ Она принимает наименьшее значение при $t = 1-\varepsilon$, равное $m = 1-(1-\varepsilon)^2 > 0.$ Поэтому $\|\Phi_2 z\|^2 \ge m\|Kz\|^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \|\Phi_2 z\| \ge m\|Kz\|$. Поскольку оператор K является квадратичным и $\|Kz\| > 0,$ то существует число $n > 0$, при котором $\|Kz\| \ge n\|z\|^2$. Окончательно имеем оценку на дуге U_1: $\|\Phi_2 z\| \ge mn\|z\|^2 = \alpha_1\|z\|^2$. Рассуждая аналогично для дуги U_2, содержащей точку $-z^*$, получим оценку $\|\Phi_2 z\| \ge \alpha_2\|z\|^2$.

2. Пусть V_1, V_2 – дуги окружности вне вырезанных углов. Поскольку L – линейное поле, а K – квадратичное, существуют числа $p > 0$ и $q > 0$, при которых на V_1 выполняются неравенства: $\|Kz\| \le q\|z\|^2$, $\|Lz\| \ge p\|z\|$. Для нормы векторного поля Φ_2 получим соотношение

$$\|\Phi_2\| = \|L+K\| \ge \|L\| - \|K\| \ge p\|z\| - q\|z\|^2 = \|z\|(p-q\|z\|).$$

Если рассматривать окружности достаточно малых радиусов (для которых $\|z\| \le \min(\frac{p}{2q},1)$), то получим оценку $\|\Phi_2 z\| \ge \frac{p}{2}\|z\|$. Поскольку $\|z\| \le 1$, то $\|z\| > \|z\|^2$, а значит, на дуге V_1 выполняется неравенство $\|\Phi_2 z\| \ge \frac{p}{2}\|z\|^2 = \alpha_3\|z\|^2$. Проводя аналогичные рассуждения, мы можем получить оценку нормы вида $\|\Phi_2 z\| \ge \alpha_4\|z\|^2$ на дуге V_2. Положим, $\alpha = 2\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$. Тогда оценка нормы вида $\|\Phi_2 z\| \ge \alpha\|z\|^2$ справедлива на всей окружности.

Теорема доказана.

Теорема 2. При выполнении требований (T_1–T_5) индексы особой точки θ векторных полей Φ и Φ_2 равны.

Доказательство. Поскольку θ – изолированная особая точка векторных полей Φ и Φ_2 (условие T_3), то существует число $r_1 > 0$, при котором оба векторных поля Φ и Φ_2 не имеют ненулевых особых точек во всех окрестностях $\overline{B_{\theta,r}}$, где $0 < r < r_1$. В окрестностях $\overline{B_{\theta,r}}$ при $0 < r < r_2$ имеем:

$$\|\Phi z - \Phi_2(z)\| = \|\omega_2(z)\| = o(\|z\|^2) \text{ (условие } T_2).$$

Поэтому при достаточно малых r ($0 < r < r_3$) выполняется следующее неравенство:

$$\|\Phi(z) - \Phi_2(z)\| \le C\|z\|^2.$$

Пусть $R = \min(r_1, r_2, r_3)$. На границе любого круга $\overline{B_{\theta,r}}$ при $0 < r < R$ выполняются все условия теоремы, поэтому справедлива оценка для $\|\omega_2 z\|$ в силу теоремы 1:

$$\|\omega_2 z\| = \|\Phi(z) - \Phi_2(z)\| \le C\|z\|^2 \le \|\Phi_2 z\|.$$

Отсюда, по теореме Руше [4, с. 14], следует гомотопность векторных полей Φ и Φ_2 на границе любого круга $\overline{B_{\theta,r}}$ при $0 < r < R$, следовательно, и равенство вращений: $\gamma(\Phi, \partial B_{\theta,r}) = \ = \gamma(\Phi_2, \partial B_{\theta,r})$. Поскольку в данных кругах нет ненулевых особых точек полей Φ и Φ_2, то

$$\mathrm{ind}(\theta,\Phi) = \gamma(\Phi, \overline{B_{\theta,r}}) = \gamma(\Phi_2, \overline{B_{\theta,r}}) = \mathrm{ind}(\theta,\Phi_2).$$

Теорема доказана.

Заключение

Используя доказанные утверждения, можно для достаточно широкого класса векторных полей, у которых линейная и квадратичная части удовлетворяют описанным условиям, а члены более высокого порядка малости могут быть произвольными, свести задачу вычисления индекса нулевой точки поля Φ к аналогичной задаче для векторного поля Φ_2. Для ее решения можно использовать алгоритм, приведенный в статье [5]. При этом неколлинеарному случаю соответствуют те ветви алгоритма, при которых $\mathrm{ind}(\theta,\Phi_2) = 0$.

Библиографические ссылки

1. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1976.

2. *Митин В. Ю.* Векторный подход к вычислению индекса Пуанкаре для изолированных нулей плоских векторных полей с вырожденной линейной частью // Вестник ПГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2010. – Вып. 4(4). – С. 4–7.

3. Векторные поля на плоскости / М. А. Красносельский [и др.] – М. : Физматгиз, 1963.

4. *Красносельский М. А.*, *Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М. : Наука, 1975.

5. *Митин В. Ю.* Вычисление индекса изолированной особой точки // Вестник ПГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2009. – Вып. 7(33). – С. 6–10.

V. Yu. Mitin, Postgraduate Student, Perm State Research University

On the Poincare Index of a Singularity of Flat Vector Field Determined by Its Linear And Quadratic Parts

The case in which the reduction of the calculation of zero singularity index of a flat vector field with non-zero degenerate Frechet derivative to the analogical problem for polynomial vector fields is possible has been considered.

Key words: Poincare index, rotation, flat vector field.