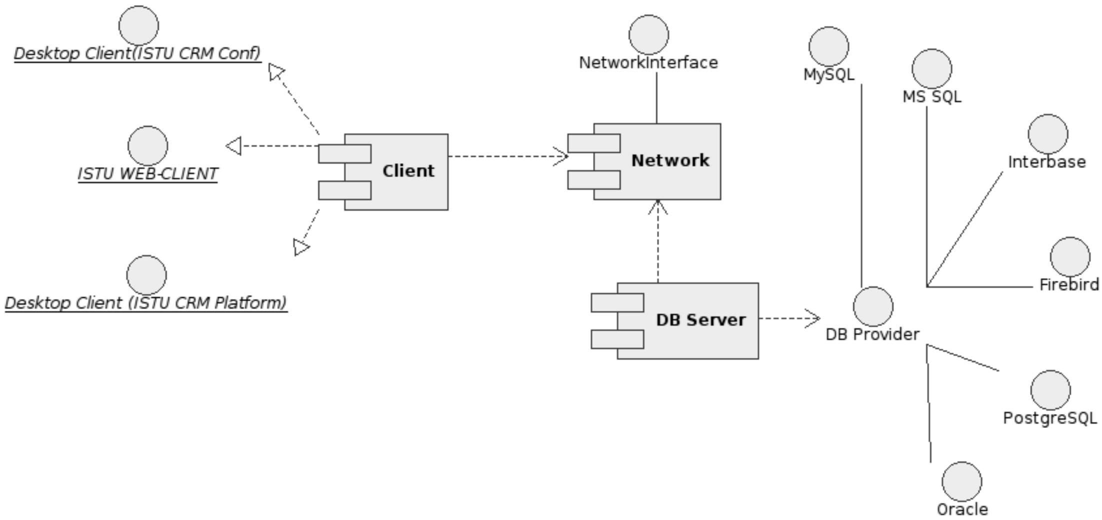

Рис. 5. Диаграмма развертывания системы

Библиографические ссылки

1. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс : пер. с англ. – 2-е изд. – М. : Вильямс, 2006 – 1104 с.
2. *Леоленков А. В.* Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. – СПб. : Питер, 2003. – 532 с.
3. *Рутковская Д.*, *Пилиньский М.*, *Рутковский Л.* Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М. : Наука, 2004. – 398 с.
4. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1989. – 278 с.
5. *Благодатский Г. А.*, *Горохов М. М.*, *Казанцев Д. И.* Создание математической модели анализа структуры аккредитационных показателей вуза с применением метода анализа иерархий // Вестник ИжГТУ. – 2010. – № 2(46). – С. 115–118.
6. *Горохов М. М.*, *Становских А. А.* Система поддержки принятия решений при управлении жилищно-коммунальным хозяйством // Интеллектуальные системы в производстве. – 2007. – № 1. – С. 107–113.

A. A. Bas, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University
G. A. Blagodatsky, Izhevsk State Technical University
M. M. Gorokhov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

Intelligent Information Tools for Construction of Objects Integral Indicators in Economic and Social System Resource Planning

Intelligent information tools for construction of objects integral indicators in economic and social system resource planning is considered. The system is based on Saati's hierarchy analysis method.

Key words: information systems, mathematical modeling, accreditation indexes, software engineering, hierarchy analysis.

УДК 519.833

Д. С. Лобарёв, Псковский государственный педагогический университет имени С. М. Кирова

РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ЭКСПЕРТНЫМИ ОЦЕНКАМИ МЕТОДОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Представлено решение многокритериальной динамической задачи с экспертными оценками. Экспертные оценки представляют собой количественную информацию об относительной важности критериев задачи. Проводится линейная свертка критериев относительного весового вектора и решается задача оптимального управления.

Ключевые слова: многокритериальная динамическая задача, экспертные оценки, динамическое программирование.

Работа посвящена поиску оптимального решения в многокритериальной динамической задаче с экспертными оценками. Динамическая управляемая система имеет стандартную форму [1–3]. Экспертные оценки определяют матрицу, каждая строка которой представляет мнение эксперта, выраженное в числовой форме. Задано мнение лица, принимающего решение (ЛПР) об экспертах. Нахо-

Получено 27.04.11

дится нормированный весовой вектор, который устраивает всех экспертов и ЛПР. Проводится линейная свертка критериев относительно этого вектора. Далее решается однокритериальная задача оптимального управления методом динамического программирования.

Рассматривается многокритериальная динамическая задача

$$\Gamma = \left\langle \Sigma, U, \{J_i\}_{i=\overline{1,m}}, P, L \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь Σ – управляемая динамическая система

$$\overset{\circ}{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

где A и B – матрицы размера $(n \times n)$ и $(n \times q)$ соответственно.

В (1) U есть множество позиционных управлений $u = K(t)x$, где $K(t)$ – непрерывная матрица размера $(q \times n)$, выбором которых распоряжается ЛПР. Математические и технические причины такого выбора управлений обоснованы в [2, 3]. В (2) представлено изменение фазового вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Здесь $t \in [t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы.

Множество критериев динамической задачи

$$J_i = \int_{t_0}^{t_1} u^T D_i u dt + x^T(t_1) C_i x(t_1), \quad i = \overline{1,m}. \quad (3)$$

Здесь D_i и C_i – положительно определенные симметрические матрицы размера $(q \times q)$ и $(n \times n)$. В матрице экспертных оценок $P = (p_{ij})_{p \times m}$ каждая строка указывает на мнение эксперта в виде коэффициентов важности критериев (3) в задаче (1). Диагональная матрица $L = (l_{ij})_{p \times p}$ дает оценку экспертам от ЛПР.

Компромиссное решение сводится к нахождению весового вектора $\mathrm{A} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ из соотношения

$$\mathrm{A} = e_p L P. \quad (4)$$

Здесь e_p – вектор-строка, состоящая из единиц. Элементы весового вектора A можно нормировать так, что $\sum \alpha_i = 1$.

Решением многокритериальной задачи (1) считается то позиционное управление, которое доставляет возможно меньшее значение линейной свертке критериев $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i J_i$. Стратегия $u^*(t,x)$ находится как решение задачи (1).

Многокритериальную динамическую задачу (1) можно свести к задаче оптимального управления с функционалом качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} u^T D\, u dt + x^T(t_1) C\, x(t_1), \quad (5)$$

где $D = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i D_i$; $C = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i$.

Решение задачи (2), (5) подробно рассмотрено в [1, с. 368–369]. Используем достаточное условие минимума функционала (5).

Утверждение. Оптимальное управление $u^*(t,x)$ в задаче (2), (5) имеет вид

$$u^*(t,x) = \frac{1}{2} D^{-1} B^T K(t) x, \quad (6)$$

где $K(t)$ – неизвестная симметрическая матрица размера $(n \times n)$, которую найдем из матричного дифференциального уравнения с краевым условием

$$\overset{\circ}{K}(t) + A^T K(t) + K(t) A + \frac{1}{2} K(t) B D^{-1} B^T K(t) = 0,$$

$$K(t_1) = -2C.$$

Модельный пример. Рассматривается двухкритериальная динамическая задача с двумя экспертами. Динамическая управляемая система имеет вид

$$\overset{\circ}{x}_1(t) = u_1(t); \quad x_1(0) = 5;$$

$$\overset{\circ}{x}_2(t) = x_1(t) + u_2(t); \quad x_2(0) = 5.$$

Здесь $x = (x_1, x_2) \in R^2$; $u = (u_1, u_2) \in R^2$; $t \in [0, 2]$. Заданы критерии:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^2 \left(u_1^2 + 4u_2^2\right) dt + 2x_1^2(2) + x_2^2(2); \\ J_2 &= \int_0^2 \left(u_1^2 + u_2^2\right) dt + 2x_1^2(2) + 4x_2^2(2). \end{aligned} \quad (7)$$

Оценка критериев экспертами, а также оценка ЛПР относительно компетентности экспертов имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда из выражения (4) находим вектор согласования и нормируем его:

$$\mathrm{A} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Сводим полученную многокритериальную задачу к задаче оптимального управления (2), (5). Здесь матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Целевая функция (5) примет вид

$$J = \int_0^2 \left(u_1^2 + 2u_2^2\right)dt + 2x_1^2(2) + 3x_2^2(2).$$

Оптимальное позиционное управление согласно (6)

$$u^*(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} K_2(t)x. \quad (8)$$

Неизвестную симметрическую матрицу $K(t) = \begin{pmatrix} K_{11}(t) & K_{12}(t) \\ K_{21}(t) & K_{22}(t) \end{pmatrix}$ найдем из дифференциального уравнения типа Риккати с краевым условием

$$\overset{\circ}{K}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} K(t) + K(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+K(t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} K(t) = 0; \quad (9)$$
$$K(2) = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Представленное уравнение в матричной форме сводится к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям с краевыми условиям. Решение этой системы будем искать численным методом Рунге – Кутта 4-го или 5-го порядков точности в среде программирования Maple 14, где воспользуемся процедурой rkf45. Точность приближенных вычислений определяется границей абсолютной погрешности $\varepsilon = 10^{-6}$. В таблице приведено численное решение уравнения (9).

Табличные значения функций $K_{11}(t)$, $K_{12}(t)$, $K_{22}(t)$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$K_{11}(t)$	–1,999999	–2,048624	–2,094140	–2,136602	–2,177650	–2,222222	–2,281879	–2,381635	–2,575757	–2,992125	–4,000000
$K_{12}(t)$	–1,000000	–1,076125	–1,152737	–1,225919	–1,289398	–1,333333	–1,342281	–1,291248	–1,136363	–0,787401	0,000000
$K_{22}(t)$	–0,833333	–0,982178	–1,163821	–1,386456	–1,660588	–2,000000	–2,423564	–2,959110	–3,652597	–4,593175	–6,000000

На основании информации о значениях функций матрицы $K_2(t)$ можно определить аппроксимации для позиционного управления (8):

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2}x_1(-0,235194t^{12} + 2,488176t^{11} - 11,465730t^{10} + 30,092585t^9 - 49,361951t^8 + 52,116165t^7 -$$
$$-34,932608t^6 + 13,753514t^5 - 2,374712t^4 - 0,221703t^3 + 0,185122t^2 - 0,265885t - 2,000000) +$$
$$+\frac{1}{2}x_2(0,153449t^{12} - 1,623417t^{11} + 7,481115t^{10} - 19,635281t^9 + 32,208731t^8 - 34,006999t^7 + 22,794751t^6 -$$
$$-8,968548t^5 + 1,572847t^4 + 0,191517t^3 - 0,136865t^2 - 0,364634t - 1,000000);$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{4}x_1(0,153449t^{12} - 1,623417t^{11} + 7,481115t^{10} - 19,635281t^9 + 32,208731t^8 - 34,006999t^7 +$$
$$+22,794751t^6 - 8,968548t^5 + 1,572847t^4 + 0,191517t^3 - 0,136865t^2 - 0,364634t - 1,000000) +$$
$$+\frac{1}{4}x_2(-0,101552t^{12} + 1,073608t^{11} - 4,945163t^{10} + 12,974251t^9 - 21,276377t^8 + 22,458656t^7 -$$
$$-15,050753t^6 + 5,919614t^5 - 1,055170t^4 - 0,221772t^3 - 0,261554t^2 - 0,680453t - 0,833333).$$

Найдем оптимальные значения функционалов (7):

$$J_1 = 76,754145; \quad J_2 = 52,247880.$$

Представлен подход к решению многокритериальных задач. Проводится линейная свертка критериев относительно весового компромиссного вектора. Задача оптимального управления решается методом динамического программирования. Найдено единственное решение (6) задачи (1).

Библиографические ссылки

1. *Пантелеев А. В.*, *Бортаковский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. – М. : Высш. шк., 2003.
2. *Жуковский В. И.*, *Салуквадзе М. Е.* Риски и исходы в многокритериальных задачах управления. – Тбилиси : Интелекти, 2004.
3. *Матвеев В. А.* Исследование конусной оптимальности в многокритериальной динамической задаче // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010. – № 5(119). – С. 92–107.

D. S. Lobaryov, Pskov State Pedagogical University

The Solution of Multicriteria Dynamic Problems with Expert Estimation by Dynamic Programming

The solution of a multicriteria dynamic problem with expert estimations is presented. Expert estimations represent the quantitative information on relative importance of problem criteria. A linear convolution of relative weight vector criteria is performed and the problem of optimal control is solved.

Key words: multicriteria dynamic problem, expert estimations, dynamic programming.

УДК 517.518

Фам Туан Кыонг, аспирант, Воронежский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Статья посвящена исследованию полной наблюдаемости нелинейной дифференциально-алгебраической системы. Применяется метод каскадного расщепления исходных пространств на подпространства. Выводится формула для нахождения вектора состояний системы. Устанавливается связь между входной и выходной функциями.

Ключевые слова: нелинейная система наблюдения, полная наблюдаемость, каскадное расщепление.

Рассматривается дифференциально-алгебраическая нелинейная система

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + G(t, x(t)) + f(t), \qquad (1)$$

$$F(t) = Ax(t), \qquad (2)$$

где $B : R^n \to R^n$; $A : R^n \to R^s$; $x(t) \in R^n$; $f(t) \in R^n$; $F(t) \in R^s$,

и нелинейная функция

$$G(t, x(t)) \in R^n, \quad t \in [0, T]$$

(T конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t)$ называется *вектором состояний системы*, $f(t)$ и $F(t)$ – *входная и выходная функции* соответственно.

Систему (1), (2) будем называть *полностью наблюдаемой* (идентифицируемой по Калману), если по реализуемым, наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно.

Выявление полной наблюдаемости или ненаблюдаемости нелинейной системы (1), (2) будет проделано ниже с использованием метода каскадного расщепления исходных пространств на подпространства, то есть поэтапного перехода к системам, аналогичным исходной, но относительно элементов из все более «узких» подпространств (см. [1–3]).

В ходе применения метода каскадного расщепления осуществляется переход от системы (1), (2) к системам, которые будем именовать системами *первого шага, второго шага* и т. д.

Прямоугольной в общем случае матрице A соответствуют разложения:

$$R^n = CoimA \dotplus KerA; \quad R^s = \operatorname{Im} A \dotplus CokerA, \qquad (3)$$

где $\operatorname{Im} A$ – множество значений A в R^s (образ A); $CokerA$ – прямое дополнение к подпространству $\operatorname{Im} A$ в R^s; $KerA$ – множество решений уравнения $Ax(t) = 0$ (ядро A) в R^n; $CoimA$ – прямое дополнение к подпространству $KerA$ в R^n.

Через $P(A)$ и $Q(A)$ обозначим матрицы проекторов на подпространства $KerA$ и $CokerA$ соответственно, тогда $(I - P(A))$ и $(I - Q(A))$ – матрицы проекторов на подпространства $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$ соответственно.

Разложения (3) таковы, что сужение $\tilde{A}$ отображения A на подпространство $CoimA$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между подпространствами $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$. Введем полуобратную матрицу $A^{-} = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A))$. Известно, что уравнение (2) эквивалентно системе

$$Q(A)F(t) = 0, \qquad (4)$$

$$x(t) = A^{-}F(t) + x_1(t) \qquad (5)$$

с произвольной вектор-функцией

$$x_1(t) = P(A)x(t) \in KerA.$$

Заметим, что исходная система является корректной лишь при условии дифференцируемости функции $A^{-}F(t)$.

В зависимости от свойств матрицы A возможны три случая.

I. $A = 0$, и второе алгебраическое уравнение в системе (1), (2) принимает вид $F(t) = 0$. Функция

Получено 10.05.11