D. S. Lobaryov, Pskov State Pedagogical University

The Solution of Multicriteria Dynamic Problems with Expert Estimation by Dynamic Programming

The solution of a multicriteria dynamic problem with expert estimations is presented. Expert estimations represent the quantitative information on relative importance of problem criteria. A linear convolution of relative weight vector criteria is performed and the problem of optimal control is solved.

Key words: multicriteria dynamic problem, expert estimations, dynamic programming.

УДК 517.518

Фам Туан Кыонг, аспирант, Воронежский государственный университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Статья посвящена исследованию полной наблюдаемости нелинейной дифференциально-алгебраической системы. Применяется метод каскадного расщепления исходных пространств на подпространства. Выводится формула для нахождения вектора состояний системы. Устанавливается связь между входной и выходной функциями.

Ключевые слова: нелинейная система наблюдения, полная наблюдаемость, каскадное расщепление.

Рассматривается дифференциально-алгебраическая нелинейная система

$$\frac{dx(t)}{dt} = Bx(t) + G(t, x(t)) + f(t), \qquad (1)$$

$$F(t) = Ax(t), \qquad (2)$$

где $B: R^n \to R^n$; $A: R^n \to R^s$; $x(t) \in R^n$; $f(t) \in R^n$; $F(t) \in R^s$,

и нелинейная функция

$$G(t, x(t)) \in R^n, \quad t \in [0, T]$$

(T конечно или бесконечно).

Вектор-функция $x(t)$ называется *вектором состояний системы*, $f(t)$ и $F(t)$ – *входная и выходная функции* соответственно.

Систему (1), (2) будем называть *полностью наблюдаемой* (идентифицируемой по Калману), если по реализуемым, наблюдаемым входной и выходной функциям состояние системы определяется однозначно.

Выявление полной наблюдаемости или ненаблюдаемости нелинейной системы (1), (2) будет проделано ниже с использованием метода каскадного расщепления исходных пространств на подпространства, то есть поэтапного перехода к системам, аналогичным исходной, но относительно элементов из все более «узких» подпространств (см. [1–3]).

В ходе применения метода каскадного расщепления осуществляется переход от системы (1), (2) к системам, которые будем именовать системами *первого шага, второго шага* и т. д.

Прямоугольной в общем случае матрице A соответствуют разложения:

$$R^n = CoimA \dot{+} KerA; \quad R^s = \operatorname{Im} A \dot{+} CokerA, \qquad (3)$$

где $\operatorname{Im} A$ – множество значений A в R^s (образ A); $CokerA$ – прямое дополнение к подпространству $\operatorname{Im} A$ в R^s; $KerA$ – множество решений уравнения $Ax(t) = 0$ (ядро A) в R^n; $CoimA$ – прямое дополнение к подпространству $KerA$ в R^n.

Через $P(A)$ и $Q(A)$ обозначим матрицы проекторов на подпространства $KerA$ и $CokerA$ соответственно, тогда $(I - P(A))$ и $(I - Q(A))$ – матрицы проекторов на подпространства $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$ соответственно.

Разложения (3) таковы, что сужение $\tilde{A}$ отображения A на подпространство $CoimA$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между подпространствами $CoimA$ и $\operatorname{Im} A$. Введем полуобратную матрицу $A^- = \tilde{A}^{-1}(I - Q(A))$. Известно, что уравнение (2) эквивалентно системе

$$Q(A)F(t) = 0, \qquad (4)$$

$$x(t) = A^- F(t) + x_1(t) \qquad (5)$$

с произвольной вектор-функцией

$$x_1(t) = P(A)x(t) \in KerA.$$

Заметим, что исходная система является корректной лишь при условии дифференцируемости функции $A^- F(t)$.

В зависимости от свойств матрицы A возможны три случая.

I. $A = 0$, и второе алгебраическое уравнение в системе (1), (2) принимает вид $F(t) = 0$. Функция

Получено 10.05.11

состояния $x(t)$ находится как решение дифференциального уравнения (1) не единственным образом, и система (1), (2) является ненаблюдаемой.

II. $KerA = \{0\}$ – случай инъективной матрицы A. Функция состояния $x(t)$ находится единственным образом по формуле (5) и имеет вид

$$x(t) = A^{-}F(t). \tag{6}$$

При подстановке выражения (6) в дифференциальное уравнение (1) получаем уравнение связи между входной $f(t)$ и выходной $F(t)$ функциями:

$$\frac{dA^{-}F(t)}{dt} = BA^{-}F(t) + G(t, A^{-}F(t)) + f(t), \tag{7}$$

выполнение которого необходимо и достаточно для реализации процесса, описываемого системой (1), (2). То есть в случае инъективной матрицы A система является полностью наблюдаемой (идентифицируемой по Калману).

III. $A \neq 0$ и $KerA \neq \{0\}$. Подставив выражение для функции состояния вида (5) в (1), получаем уравнения

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \tilde{B}x_1(t) + \tilde{G}(t, x_1(t)) + \tilde{f}(t), \tag{8}$$

где $\tilde{B} = BP(A)$; $\tilde{G}(t, x_1(t)) = G(t, A^{-}F(t) + x_1(t))$;

$$\tilde{f}(t) = f(t) + BA^{-}F(t) + \frac{dA^{-}F(t)}{dt}.$$

Заметим, данный переход реализуем лишь при выполнении условия

$$(I - P(A))\tilde{G}(t, x_1(t)) = 0, \tag{9}$$

а исходная система (1), (2) корректна при условии дифференцируемости функции $A^{-}F(t)$.

От уравнения (8) переходим к системе

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = B_1x_1(t) + G_1(t, x_1(t)) + f_1(t), \tag{10}$$

$$F_1(t) = A_1x_1(t). \tag{11}$$

С учетом разложений (3) и переобозначений:

$$\tilde{B} = B_1 + A_1, \text{ где } B_1 = P(A)\tilde{B}: \ KerA \to KerA;$$

$$A_1 = (I - P(A))\tilde{B}: \ KerA \to CoimA;$$

$$G_1(t, x_1(t)) = P(A)\tilde{G}(t, x_1(t)) \in KerA;$$

$$f_1(t) = P(A)\tilde{f}(t) \in KerA;$$

$$F_1(t) = (I - P(A))\tilde{f}(t) \in CoimA.$$

Таким образом, в случае ненулевых подпространств $KerA$ и $CoimA$ на первом шаге применения метода каскадного расщепления от системы (1), (2) переходим к цепочке ограничений и условий (4), (5), (9) и системе первого шага (10), (11).

Вектор-функцию $x_1(t)$ в системе (10), (11) будем называть функцией псевдосостояния редуцированной системы первого шага, а функции $f_1(t)$ и $F_1(t)$ – функциями псевдовхода и псевдовыхода первого шага соответственно.

Для вновь полученной системы (10), (11) проведем такое же исследование, как и для исходной системы.

В силу конечномерности исходных пространств процесс каскадного расщепления окончательно реализуется за конечное равное p число шагов ($p \leq n$), и на этом последнем шаге приходим к цепочке условий:

$$Q(A_{i-1})F_{i-1}(t) = 0; \tag{12}$$

$$x_{i-1}(t) = A_{i-1}^{-}F_{i-1}(t) + x_i(t); \tag{13}$$

ограничений (которые мы накладываем на каждом шаге):

$$(I - P(A_{i-1}))\tilde{G}_{i-1}(t, x_{i-1}(t)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p; \tag{14}$$

и системе

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = B_px_p(t) + G_p(t, x_p(t)) + f_p(t), \tag{15}$$

$$F_p(t) = A_px_p(t), \tag{16}$$

где $\quad x_i(t) = P(A_{i-1})x_{i-1}(t) \in KerA_{i-1};$

$$B_i = P(A_{i-1})BP(A_{i-1}): \ KerA_{i-1} \to KerA_{i-1};$$

$$A_i = (I - P(A_{i-1}))BP(A_{i-1}): \ KerA_{i-1} \to CoimA_{i-1};$$

$$f_i(t) = P(A_{i-1})\tilde{f}_{i-}(t) \in KerA_{i-1};$$

$$F_i(t) = (I - P(A_{i-1}))\tilde{f}_{i-1}(t) \in CoimA_{i-1};$$

$$\tilde{f}_{i-1}(t) = f_{i-1}(t) + B_{i-1}A_{i-1}^{-}F_{i-1}(t) + \frac{dA_{i-1}^{-}F_{i-1}(t)}{dt},$$

а нелинейное слагаемое имеет вид

$$\tilde{G}_{i-1}(t, x_i(t)) = G_{i-1}(t, A_{i-1}^{-}F_{i-1}(t) + x_i(t));$$

$$G_i(t, x_i(t)) = P(A_{i-1})\tilde{G}_{i-1}(t, x_i(t)) \in KerA_{i-1}.$$

Таким образом, доказана лемма 1.

Лемма 1. *При выполнении условий (14) система (1), (2) эквивалентна цепочке условий и уравнений (12), (13), (15), (16).*

Матрица A_p такова, что возможны лишь два случая:

I. $A_p = 0$, и второе алгебраическое уравнение в системе (15), (16) принимает вид $F_p(t) = 0$. Функция псевдосостояния $x_p(t)$ находится как решение дифференциального уравнения (15) не единственным образом, то есть редуцированная система последнего шага (15), (16) является ненаблюдаемой. Следовательно, и исходная система (1), (2) является ненаблюдаемой, так как функция состояния этой системы, восстановленная по формулам (13) (при $i = p,\ \ p-1,\ldots,\ 1,\ 0$) определяется не единственным образом.

II. $KerA_p = \{0\}$ – случай инъективной матрицы A_p. Уравнение (16) эквивалентно системе:

$$Q(A_p)F_p(t) = 0, \tag{17}$$

$$x_p(t) = A_p^- F_p(t) \tag{18}$$

с дифференцируемой вплоть до *k*-го порядка функцией $A_p^- F_p(t) \in CoimA_p$.

При выполнении условия разрешимости (17) функция псевдосостояния $x_p(t)$ однозначно определяется по формуле (18), а значит, система (15), (16) является полностью наблюдаемой.

После подстановки выражения для функции $x_p(t)$ вида (18) в уравнение (15) получаем соотношение

$$f_p(t) = \frac{dx_p(t)}{dt} - B_p x_p(t) - G_p(t, x_p(t)), \tag{19}$$

которое является условием согласования между $f_p(t)$ и $F_p(t)$ – функциями псевдовхода и псевдовыхода последнего шага, выполнение которого необходимо для реализации процесса. Справедлива лемма 2.

Лемма 2. *При выполнении условий (14) (с $i = p$), (17) и (19) система (15), (16) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица A_p – инъективна ($KerA_p = \{0\}$).*

В случае полной наблюдаемости редуцированной системы последнего шага (15), (16) функция состояния $x(t)$ исходной системы (1), (2) единственным образом восстанавливается по формулам (13) (при $i = p,\ p-1,\ldots,1,\ 0$) и имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=0}^{p} A_i^- F_i(t). \tag{20}$$

С учетом переобозначений: $A_0^- = A^-$; $F_0(t) = F(t)$.

При подстановке выражения (20) для $x(t)$ в уравнение (1) получаем условия согласования – ряд соотношений между функциями $f_i(t)$ и $F_i(t)$ – псевдовхода и псевдовыхода всех этапов каскадного расщепления:

$$f_i(t) = \frac{d\left(\sum_{j=0}^{p-i} A_j^- F_j(t)\right)}{dt} - B_i \sum_{j=0}^{p-i} A_j^- F_j(t) - G_i\left(t, \sum_{j=0}^{p-i} A_j^- F_j(t)\right). \tag{21}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *При выполнении условии (12) и (14) нелинейная система (1), (2) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица A_p – инъективна. При этом необходимо выполняются условия согласования (21), а функция состояния $x(t)$ единственным образом определяется по формуле (20).*

Библиографические ссылки

1. *Zubova S. P.*, *Trung L. H.*, *Raetskaya E. V.* On polynomial solutions of the linear stationary control system // Automation and Remote Control. – 2008. – Vol. 69. 11. – P. 1852–1858.

2. *Зубова С. П.*, *Раецкая Е. В.*, *Фам Туан Кыонг.* Полная наблюдаемость нестационарной дифференциально-алгебраической системы // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6. – № 8. – С. 82–86.

3. *Зубова С. П.*, *Раецкая Е. В.*, *Фам Туан Кыонг.* Об инвариантности нестационарной системы наблюдения относительно некоторых возмущений // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». – 2010. – Т. 15. – Вып. 6. – С. 1678–1679.

Pham Tuan Cuong, Postgraduate Student, Voronezh State University

Study of Complete Observability of Nonlinear Differential-Algebraic System

The study of complete observability of nonlinear differential-algebraic system is considered. The method of cascading splitting the original space into the subspace is used. The formula for finding a state vector is derived. The relation between input and output functions is determined.

Key words: nonlinear observing system, complete observability, cascading splitting.