МАТЕМАТИКА

УДК 339.5.018.62

В. П. Первадчук, доктор технических наук, профессор, Пермский государственный технический университет
М. А. Северин, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский государственный технический университет

О МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ УСЛОВИЙ ВЫРАВНИВАНИЯ ЦЕН НА ФАКТОРЫ ПРОИЗВОДСТВА

Предложены два подхода к построению условий выравнивания цен на факторы производства в торгующих странах: один базируется на использовании однопараметрического семейства кривых, а второй – на методе продолжения.

Ключевые слова: цены, факторы производства, отображение, взаимная однозначность.

В данной работе рассматривается проблема выравнивания цен на факторы производства (см., напр., [1]). Напомним постановку задачи. Предположим, что экономика некоторой страны, участвующей в международной торговле, производит ряд товаров. Тогда конкуренция среди производителей обеспечит равенство цены каждого товара издержкам его производства. Издержки производства конкретного товара зависят от цен на факторы производства. Таким образом, можно говорить, что существует прямая зависимость между ценами на товары и участвующими в их производстве факторами. Эту зависимость принято называть функцией издержек.

Предположим, что количество факторов производства совпадает с количеством производимых продуктов и равно n, причем факторы полностью подвижны внутри страны и совершенно неподвижны между странами, а все товары производятся в условиях постоянной эффективности при изменяющемся масштабе производства. Предполагая одинаковыми для всех стран функции производства и производственные возможности, можно говорить о совпадении функций издержек в торгующих странах.

Обозначим функцию издержек $p = c(w)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$; $w = (w_1, \dots, w_n)$ – наборы мировых цен на товары и на факторы производства соответственно.

Известно [2, 3], что взаимная однозначность функции издержек $p = c(w)$ гарантирует выравнивание цен на факторы производства для всех стран.

Одно из первых условий взаимной однозначности отображения $p = c(w)$ с учетом специфических свойств функции издержек было получено Самуэльсоном [2] для случая $n = 2$. Затем другими методами был установлен ряд условий выравнивания цен на факторы производства (см., напр., [1]). В данной статье обобщается метод Самуэльсона и изучаются возможности получения условий выравнивания методом продолжения (см., напр., [4]).

Напомним, что в методе Самуэльсона требуется неравенство нулю якобиана отображения $p = c(w) = (c_1(w_1, w_2), c_2(w_1, w_2))$ и используется однородность и положительность функций издержек $c_i(w_1, w_2)$, $i = 1, 2$. В этих предположениях вопрос взаимной однозначности отображения $p = c(w)$ сводится к вопросу о единственности положительного решения уравнения

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{c_2(1, \omega)}{c_1(1, \omega)} \tag{1}$$

относительно одного скалярного неизвестного $\omega\ (= w_2 / w_1)$. Если величина $c_2(1, \omega) / c_1(1, \omega)$ является при наложенных требованиях строго монотонной, то она может совпадать с p_2 / p_1 не более одного раза, что говорит о выравнивании цен на факторы производства.

Эти рассуждения можно провести несколько иначе. Рассмотрим на комплексной плоскости однопараметрическое семейство простых кривых Γ с параметрическими уравнениями $z(t) = t \exp[i\varphi(t) + a]$, $0 < t < +\infty, 0 \le a < 2\pi$ функция $\varphi(t)$ – вещественная и дифференцируемая на $(0, +\infty)$, которое покрывает комплексную плоскость и получается вращением вокруг нуля одной из кривых Γ. Предположим также, что функция $c(w) = c_1(w) + i\, c_2(w)$ с отличным от нуля якобианом в своей области определения G непрерывна в замкнутой области G. Пусть L – граница образа G при отображении функцией $p = c(w)$. Тогда точками пересечения Γ и L определится некоторая однозначная функция $a(\tau), 0 \le \tau < 2\pi$. Здесь мы считаем равенство $w = w(\tau)$, $0 \le \tau < 2\pi$, параметрическим уравнением границы G и, следовательно, $c = c(w(\tau))$ – параметрическим уравнением линии L. Известно [5], что в случае различных однопараметрических семейств кривых требование строгой монотонности $a(\tau)$ обеспечивает взаимную однознач-

Получено 04.02.11

ность функции $p=c(w)$ в G. Как мы видим, Самуэльсон по сути дела доказал строгую монотонность функции $a(\tau)$, равной правой части (1).

В случае n = 3 вопрос о взаимной однозначности отображения $p=c(w)$ из-за однородности функции $c(w)$ сводится к установлению взаимной однозначности отображения $f(\omega_1,\omega_2)=(c_1(\omega_1,\omega_2,1)/c_3(\omega_1,\omega_2,1),$ $c_2(\omega_1,\omega_2,1)/c_3(\omega_1,\omega_2,1)),$ $\omega_1=w_1/w_3,$ $\omega_2=w_2/w_3.$ Значит, в случае n = 3 можно использовать вышеприведенные рассуждения и получать различные условия выравнивания цен. Такой подход к получению условий взаимной однозначности продемонстрирован, например, в работе [6].

Перейдем к общему случаю: количество товаров и факторов равно n. Здесь можно поступить иначе. Вместо изучения свойств функции $a(\tau)$ покроем образ G при отображении $p=c(w)$ семейством кривых Г, для чего проще всего воспользоваться методом продолжения. Получение следующего ниже признака выравнивания цен на факторы производства основано именно на этой идее.

Пусть G – прямоугольная область в R^n с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, $w=(w_1, \ldots, w_n)$, $c=(c_1, \ldots, c_n)$ – точки в R^n. Рассмотрим отображение $c: G\to R^n$. Запись $c\in C^k(G)$ означает, как обычно, что компоненты векторной функции $p=c(w)$ k раз непрерывно дифференцируемы в G. Через $Dc(w)$ обозначим линейный оператор, определяемый матрицей

$$Dc(w)=\left(\frac{\partial c_k(w)}{\partial w_j}\right),\quad 1\le j,\ k\le n.$$

Получим условие взаимной однозначности для отображений, заданных в прямоугольных областях.

Теорема. Пусть отображение $c:\overline{G}\to R^n$ принадлежит классу $c\in C^k(\overline{G})$ и в каждой точке $w\in\overline{G}$ существует линейный оператор $D^{-1}c(w)$, обратный оператору $Dc(w)$. Пусть кроме того выполнено условие: для любого вектора $h\in R^n$ справедливо неравенство

$$hA(w)h^T>\gamma hh^T,\quad w\in\partial G. \tag{2}$$

Тогда отображение $c(w)$ взаимно однозначно в G. Здесь $A(w)=\left\{D^{-1}c(w)\left[c(w)-c(w_0)\right]^T(w-w_0)-\right.$ $\left.-(w-w_0)^T(w-w_0)\right\}\|w-w_0\|^{-2}+E,$ E – единичная матрица; w_0 – центр прямоугольной области G, $\gamma=\left(b^2-a^2\right)/a^2$; a и b – максимальное и минимальное расстояния от центра G до границы ∂G соответственно. Кроме того предполагается, что $c(w)\ne c(w_0), w\in\overline{G}/\{w_0\}$.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения (см., напр., [4]). Без ограничения общности можно считать, что $w_0=(0,\ldots,0)$ и $c(w_0)=$ $=(0,\ldots,0)$. Если это не так, то нужно рассмотреть отображение $c_1(w)=c(w+w_0)-c(w_0)$, где w принадлежит прямоугольной области G_1 с центром в нуле.

Рассмотрим отображение

$$F(w)=\begin{cases} c(w),\ w\in\overline{G},\\ \dfrac{w_k}{a_k}c\left(\dfrac{a_k}{w_k}w\right),\ w\in R^n/\overline{G},\end{cases}$$

где w_k – k-я координата точки w, а индекс k и число a_k определяются по точке w следующим условием: луч tw, $0<t<+\infty$, пересекает грань G, уравнение которой $w_k=a_k$.

Отображение $F(w)$ непрерывно в R^n, и любую последовательность точек, сходящуюся к бесконечности переводит в аналогичную. Если мы докажем локальную гомеоморфность отображения $F(w)$ в R^n, то по теореме Адамара $F(w)$ будет гомеоморфна в R^n, а значит, отображение $p=c(w)$ будет взаимно однозначным в G. Так как локальная гомеоморфность отображения $F(w)$ в $\overline{G}$ следует из условий теоремы, нужно рассмотреть случай $w\in R^n/\overline{G}$.

Докажем, что отображение $F(w)$ локально гомеоморфно в $w\in R^n/\overline{G}$. Для этого достаточно установить, что $\det DF(w)\ne 0,\ w\in R^n/\overline{G}$.

Имеем

$$DF(w)=\frac{1}{a_k}\left(c\left(\frac{a_k}{w_k}w\right)\right)^T e_k+Dc\left(\frac{a_k}{w_k}w\right)\left(E-\frac{1}{w_k}B\right),$$

где e_k – вектор, у которого k-я координата равна 1, все остальные координаты равны 0; в матрице B k-й столбец совпадает с w^T, все остальные столбцы состоят из нулей.

Умножим матрицу $DF(w)$ слева на матрицу $a_kD^{-1}c(a_kw/w_k)$, а справа на матрицу

$$\Lambda=\begin{pmatrix} a_k+\dfrac{\varepsilon^2}{a_k} & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_k+\dfrac{\varepsilon^2}{a_k} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & a_k+\dfrac{\varepsilon^2}{a_k} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \dfrac{a_k}{w_k}w_1 & \dfrac{a_k}{w_k}w_2 & \dfrac{a_k}{w_k}w_3 & \ldots & \dfrac{a_k}{w_k}w_n\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_k+\dfrac{\varepsilon^2}{a_k}\end{pmatrix},$$

которая получается из матрицы $\left(a_k + \varepsilon^2/a_k\right)E$ заменой k-й строки на строку $a_k w/w_k$. Здесь ε – произвольное положительное число.

Получим:

$$T\left(\frac{a_k}{w_k}w\right) = a_k D^{-1} c\left(\frac{a_k}{w_k}w\right) DF(w)\Lambda =$$

$$= D^{-1} c\left(\frac{a_k}{w_k}w\right)\left(c\left(\frac{a_k}{w_k}w\right)\right)^T \left(\frac{a_k}{w_k}w\right) + a_k\Lambda - \frac{a_k}{w_k}B\Lambda.$$

Определители матриц $D^{-1}c\left(a_k w/w_k\right))$ и Λ не равны нулю. Для первой матрицы это следует из условий теоремы, а для второй проверяется непосредственно. Поэтому теорема будет доказана, если окажется, что $\det T\left(a_k w/w_k\right) \neq 0,\ \ w \in R^n / \overline{G},$ или, что то же самое, если $\det T\left(w\right) \neq 0,\ \ w \in \partial G.$ Последнее будет справедливо, если матрица $T\left(w\right)$ является положительно определенной.

Проверим это. Из условия (2) теоремы для любого вектора h из R^n имеем:

$$hT(w)h^T = h\|w\|^2\left(A(w) - E\right)h^T +$$

$$+ ha_k\Lambda h^T > \left(\gamma - 1\right)\|w\|^2\|h\|^2 + ha_k\Lambda h^T, \quad w \in \partial G.$$

Мы получим требуемое, если

$$ha_k\Lambda h^T \geq (\gamma - 1)\|w\|^2\|h\|^2. \qquad (3)$$

Но

$$ha_k\Lambda h^T = a_k^2\|h\|^2 + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n}\left(\varepsilon h_i + a_k h_k\frac{w_i}{2\varepsilon}\right)^2 -$$

$$-\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} a_k^2 h_k^2\frac{w_i^2}{4\varepsilon^2} \geq a_k^2\|h\|^2 - a_k^2 h_k^2\frac{\|w\|^2}{4\varepsilon^2} \geq$$

$$\geq \|w\|^2\left(\frac{a_k^2}{\|w\|^2} - \frac{a_k^2}{4\varepsilon^2}\right)\|h\|^2 \geq \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{a_k^2}{4\varepsilon^2}\right)\|w\|^2\|h\|^2 =$$

$$= \left(1 - \gamma - \frac{a_k^2}{4\varepsilon^2}\right)\|w\|^2\|h\|^2.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует неравенство (3). Теорема доказана.

Итак, если функция $p = c\left(w\right)$ удовлетворяет условиям теоремы, то цены на факторы производства в странах будут выравниваться.

Библиографические ссылки

1. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М. : Мир, 1972. – 518 с.
2. *Samuelson P. A.* International Trade find the Equalization of Factor Prices // Economic Journal. – 1948. – No 58. – P. 163–184.
3. *Samuelson P. A.* International Factor Price Equalization Once Again // Economic Journal. – 1949. – No 59. – P. 181–197.
4. *Авхадиев Ф. Г.* Конформные отображения и краевые задачи. – Казань : Каз. фонд «Математика», 1996. – 216 с.
5. *Авхадиев Ф. Г.*, *Аксентьев Л. А.* Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций // Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30. – № 4. – С. 3–60.
6. *Севодин М. А.* Об одном достаточном условии p-листности аналитических функций // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – 2002. – Т. 13. – С. 147–149.

V. P. Pervadchuk, Doctor of Technical Sciences, Professor, Perm State Technical University
M. A. Sevodin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Perm State Technical University

On Methods of Construction of Conditions for Price Equalization of Production Factor Prices

Two approaches to the development of conditions for optimal adjustment of production factor prices in trading countries are proposed. The first approach uses the one-parameter family of curves, and the other is based on the continuation method.

Key words: price, factors of production , mapping, one-oneness.