УДК 517.929

А. Р. Абдуллаев, доктор физико-математических наук, профессор, Пермский государственный технический университет
А. А. Савочкина, Пермский государственный технический университет

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Получены условия разрешимости (существования решения) уравнения Ван дер Поля с отклоняющимся аргументом.

Ключевые слова: уравнение Ван дер Поля, периодическая задача, существование решения.

Уравнение вида

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+x(t)=h(t) \quad (1)$$

известно в теории дифференциальных уравнений как уравнение Ван дер Поля [1]. Это уравнение применяется при моделировании колебательных процессов, в которых воздействие не зависит от времени *t*, а зависит только от положения (координаты) $x=x(t)$ [2, с. 244]. Это же уравнение служит моделью многих прикладных задач (например, возникает в теории захвата [3]). Периодические краевые задачи для уравнения (1) изучались многими авторами (см., например, [3, 4, 5]).

В настоящей работе рассматривается периодическая краевая задача для уравнения Ван дер Поля с отклоняющимся аргументом

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+x(p(t))=h(t); \quad (2)$$

$$x(0)=x(\omega);\ x'(0)=x'(\omega), \quad (3)$$

где $t\in[0,\omega]$; $x:[0,\omega]\to R^1$ – искомая функция; $f:R^1\to R^1$ – непрерывная функция и $h:[0,\omega]\to R^1$. Относительно отклонения аргумента $p(t)$ будем предполагать, что эта функция измерима и ограничена в существенном и $p([0,\omega])\subset[0,\omega]$. Уравнение Ван дер Поля с отклоняющимся аргументом возникает, например, при описании процессов, происходящих в электрических схемах при учете запаздывания или отклонения (см., например, [6]).

Определим следующие функциональные банаховы пространства:

$L_2=L_2[0,\omega]$ – пространство функций, суммируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0,\omega]$, с нормой $\|x\|_{L_2}=\left\{\int_0^\omega |x(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}$; $W_2=W_2[0,\omega]$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,\omega]\to R^1$ таких, что $x''\in L_2$, с нормой $\|x\|_{W_2}=|x(0)|+|x'(0)|+\|x''\|_{L_2}$. Символом W_2^0 обозначим подпространство пространства W_2 такое, что

$$W_2^0=\{x\in W_2 \,/\, x(0)=x(\omega),\ x'(0)=x'(\omega)\}.$$

Под решением задачи (2), (3) будем понимать такую функцию $x\in W_2$, которая почти всюду на $[0,\omega]$ удовлетворяет уравнению (2) и периодическим краевым условиям (3). Отметим, что периодическая задача (2), (3) на пространстве W_2^0 становится эквивалентной только уравнению (2).

Определим операторы $L,F:W_2^0\to L_2$ равенствами

$$(Lx)(t)=x''(t);$$
$$(Fx)(t)=h(t)-f(x(t))x'(t)-x(p(t)),\ h(t)\in L_2$$

и запишем краевую задачу (2), (3) в виде операторного уравнения

$$Lx=Fx. \quad (4)$$

Оператор $L:W_2^0\to L_2$ является линейным ограниченным, ядро и образ которого задаются равенствами

$$\ker L=\{x\in W_2^0 \,/\, x=\text{const}\};$$
$$R(L)=\left\{y\in L_2 \,/\, \int_0^\omega y(t)\,dt=0\right\}.$$

Линейные ограниченные проекторы, соответственно, на ядро и образ оператора $L:W_2^0\to L_2$ определим равенствами

$$P:W_2^0\to W_2^0,\ Px=x(0);$$
$$Q:L_2\to L_2,\ Qy=y(t)-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(t)\,dt.$$

Вместе с проектором Q будем рассматривать дополнительный проектор $Q^c:L_2\to L_2$, $Q^c y=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega y(t)\,dt$, а также проекционный оператор $Q_0:L_2\to R(L)$, $Q_0 y=Qy,\ y\in L_2$. Отметим, что опе-

© Абдуллаев А. Р., Савочкина А. А., 2011
Получено 23.05.11

ратор $Q_0 : L_2 \to R(L)$ является сужением проектора Q на образ оператора L.

Порождаемые проекторами P и Q разложения пространств $X = W_2^0, Y = L_2$ представим в виде

$$X = \ker L \oplus X_0; \quad Y = R(L) \oplus Y_0, \tag{5}$$

где $\ker L = R(P)$; $X_0 = \ker P$; $R(L) = R(Q)$; $Y_0 = \ker Q$,

и определим оператор $Q_0^c : L_2 \to Y_0$ равенством $Q_0^c y = Qy, \; y \in L_2$.

Для рассматриваемого случая операторное уравнение (4), а следовательно, и краевая задача (2), (3) является резонансной, так как оператор L необратим. Для исследования на разрешимость операторного уравнения применим преобразование Ляпунова – Шмидта. Отметим, что это преобразование традиционно применяется для исследования задач на бифуркацию [7]. Это же преобразование оказалось основным инструментом для исследования операторного уравнения в резонансном случае [8, с. 55].

Для непрерывного оператора $F : X \to Y$ рассмотрим функциональную характеристику

$$b_F(r) = \sup\{\|Fx\| / x \in U(r)\},$$

где $U(r) \subset X$ – замкнутый шар пространства X радиуса $r > 0$ с центром в нулевом элементе $\theta \in X$. Отметим, что $b_F(r)$ характеризует степень роста нормы оператора F с возрастанием радиуса шара $U(r)$. В частности, для линейного оператора $K : X \to Y$ справедливо равенство $b_K(r) = \|K\| r$.

Через $K_P : R(L) \to X$ обозначим обобщенно обратный к L оператор, ассоциированный с проектором P [9, с. 40]. Для сюръективного оператора $L_0 : X \to R(L)$, определенного равенством $L_0 x = Lx, x \in X$, оператор K_P является правым обратным, т. е. $L_0 K_P = I$, где I – тождественный оператор.

Предварительно докажем следующие утверждения о разрешимости квазилинейного операторного уравнения (4).

Теорема 1. Пусть оператор $F : X \to Y$ вполне непрерывен, и существует непрерывный оператор $T : X_0 \to X$ такой, что выполнены условия:

1) $T(X) \subset \ker L$;

2) $F(x + Tx) \in R(L)$ для любого $x \in X$;

3) неравенство $b_F(r + b_T(r)) < \|K_P\|^{-1} r$ имеет решение $r_0 > 0$.

Тогда уравнение $Lx = Fx$ имеет хотя бы одно решение в шаре $U(r_0) \subset X$.

Доказательство. В силу разложения (5) для любого элемента $x \in X$ справедливо представление в виде $x = u + z$, где $u \in \ker L, z \in X_0$. Тогда в результате применения преобразования Ляпунова – Шмидта получим систему

$$\begin{cases} L_0 z = Q_0 F(u + z), \\ Q_0^c F(u + z) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Подчеркнем, что эта система является эквивалентной уравнению (4).

В силу условий теоремы система (6) сводится к одному уравнению

$$L_0 z = Q_0 F(z + Tz), \tag{7}$$

где $u = Tz$.

Из разрешимости уравнения (7) следует разрешимость уравнения (4). Действительно, пусть $z_0 \in X_0$ – решение уравнения (7). Положим $x = z_0 + Tz_0$ и покажем, что этот элемент является решением уравнения (4). Так как $T(X) \subset \ker L$, то $Lx = L(z_0 + Tz_0) = Lz_0$. В силу условия 2) теоремы получим, что $F(z_0 + Tz_0) \in R(L)$, и поэтому $Q_0 F(z_0 + Tz_0) = F(z_0 + Tz_0)$. Таким образом, $Lx = Lz_0 = Q_0 F(z_0 + Tz_0) = Fx$.

С учетом условия 2) теоремы разрешимость уравнения (7) следует из разрешимости уравнения второго рода $z = K_P F_0 z$, где оператор $F_0 : X \to R(L)$, определен равенством $F_0 z = F(z + Tz)$. Оператор $K_P F_0$ обладает свойством полной непрерывности как произведение линейного ограниченного оператора K_P, вполне непрерывного оператора F и непрерывного оператора $(I + T)$. В силу условия 3) неравенство $b_{F_0}(r + b_T(r)) < \|K_P\|^{-1} r$ имеет положительное решение r_0. Это означает справедливость вложения $K_P F_0(U(r_0)) \subset U(r_0)$. Таким образом, выполнены условия теоремы Шаудера [10, с. 407], согласно которой уравнение $z = K_P F_0 z$ имеет хотя бы одно решение. Это означает, что уравнение (7), а следовательно, и уравнение (4) имеют хотя бы одно решение. Теорема доказана.

Применим теорему 1 к периодической задаче (2), (3). Отметим, что уравнение (2), с одной стороны, является частным случаем уравнения Льенара, с другой – имеет свою специфику, связанную со слагаемым, не содержащим производной. Эта специфика позволяет определить требуемый в теореме 1 оператор T для задачи (2), (3) непосредственно из уравнения.

Лемма 1. Оператор $T : X_0 \to X$, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 1, для уравнения (4) имеет вид

$$Tx = \sqrt{\omega} h_0 - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} x(p(t)) dt,$$

и справедлива оценка

$$b_T(r) \le \sqrt{\omega}|h_0| + \gamma_1 r,$$

где $\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}$; $h_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_0^\omega h(t)\,dt.$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $Q_0^c F(x+u) = 0,$ где $x \in X_0$; $u \in \ker L.$

$$Q_0^c F(x+u) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \Big[h(t) - f\big(x(t)+u\big)\big(x(t)+u\big)' - \\ -\big(x(p(t))+u\big)\Big]dt = \\ = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega h(t)\,dt - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f\big(x(t)+u\big)\big(x(t)+u\big)'dt - \\ -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \big(x(p(t))+u\big)dt.$$

Интеграл $\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(x+u)(x+u)'dt = 0$ в силу краевых условий (3), а $\frac{1}{\omega}\int_0^\omega h(t)\,dt = \sqrt{\omega}h_0$ по условию. Тогда уравнение $Q_0^c F(x+u) = 0$ принимает вид

$$\sqrt{\omega}h_0 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \big(x(p(t))+u\big)dt = 0;\ \ x \in X_0;\ \ u \in \ker L.$$

Поэтому $u = \sqrt{\omega}h_0 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(p(t))\,dt.$ Таким образом, непрерывный оператор $T : X_0 \to X$ определен равенством $Tx = \sqrt{\omega}h_0 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(p(t))\,dt.$

Найдем оценку $b_T(r).$ Заметим, что для любого элемента $x(t) \in W_2^0$ справедливы неравенства:

$$|x(t)| \le \gamma_1 \|x(t)\|_{W_2^0};\ \ |x'(t)| \le \gamma_2 \|x(t)\|_{W_2^0}, \qquad (8)$$

где $\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}$; $\gamma_2 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}.$

$$b_T(r) = \sup_{\|x\|\le r}\|Tx\| = \sup_{\|x\|\le}\left|\sqrt{\omega}h_0 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(p(t))dt\right| \le \sqrt{\omega}|h_0| + \\ + \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega}}\gamma_1 r = \sqrt{\omega}|h_0| + \gamma_1 r,$$

где $\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}.$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть для любого $u \in R^1$ выполнено неравенство

$$|f(u)| \le a + b|u|,\ \text{где}\ a, b > 0,$$

тогда оператор F является вполне непрерывным, причем

$$b_F(r) \le \sqrt{\omega}\big(b\gamma_1\gamma_2 r^2 + (a\gamma_2 + \gamma_1)r + h_1\big),$$

где $h_1 = \frac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$; $\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}$;

$\gamma_2 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}.$

Доказательство. На каждом ограниченном шаре пространства W_2^0 вполне непрерывность оператора F проверяется непосредственно, используя вполне непрерывность вложения пространств $W_2^0 \subset L_2$; $D_2 \subset L_2$, где $D_2 = D_2[0,\omega]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,\omega] \to R^1$ таких, что $x' \in L_2$, с нормой $\|x\|_{D_2} = |x(0)| + \|x'\|_{L_2}$.

Теперь оценим характеристику $b_F(r)$, применяя неравенства (8). Так как

$$\|Fx\|_{L_2} = \left\{\int_0^\omega |Fx|^2 dt\right\}^{1/2} \le \\ \le \sqrt{\omega}\Big(b\gamma_1\gamma_2\|x\|^2 + (a\gamma_2 + \gamma_1)\|x\| + h_1\Big),$$

то $b_F(r) \le \sqrt{\omega}\big(b\gamma_1\gamma_2 r^2 + (a\gamma_2 + \gamma_1)r + h_1\big)$,
где

$$h_1 = \frac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}};\ \ \gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\};\ \ \gamma_2 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Обобщенно обратный оператор $K_P : R(L) \to X$, ассоциированный с проектором P, имеет вид

$$(K_P y)(t) = \frac{t}{\omega}\int_0^\omega s y(s)\,ds + \int_0^t (t-s)\,y(s)ds,\ \ \forall y \in L_2,$$

и справедлива оценка $\|K_P\| \le 1 + \sqrt{\frac{\omega}{3}}.$

Доказательство. Тот факт, что оператор $K_P : R(L) \to X$ является обобщенно обратным к L оператором, устанавливается непосредственно проверкой условий:

1) $L\ \ K_P = I$, где $I : R(L) \to R(L)$ – тождественный оператор;

2) $K_P L = P^c$;

3) $P^c K_P = K_P$.

Для произвольного $y \in L_2$ имеем:

$$\|K_P y\|_{W_2^0} \le \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\|y\|_{L_2} + \|y\|_{L_2} = \left(1 + \sqrt{\frac{\omega}{3}}\right)\|y\|_{L_2}.$$

Таким образом, $\|K_P\| \le 1 + \sqrt{\frac{\omega}{3}}.$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия лемм 1 и 2 и справедливо неравенство

$$h_1 < \frac{\left(\sqrt{\omega}\left(a\gamma_2+\gamma_1\right)\left(1+\gamma_1\right)-\gamma_0\right)^2}{4\omega b\gamma_1\gamma_2\left(1+\gamma_1\right)\left(\sqrt{\omega}\gamma_0+1+\gamma_1\right)}, \qquad (9)$$

где

$$h_1 = \frac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}; \quad \gamma_0 = \left(1+\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right)^{-1};$$

$$\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}; \quad \gamma_2 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}.$$

Тогда периодическая задача (2), (3) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Найдем оценку $b_F\left(r+b_T\left(r\right)\right)$, используя леммы 1 и 2, а также оценки (8). Так как $\left|h_0\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\omega} h\left(s\right)ds\right| \le \|h\|_{L_2} = \sqrt{\omega}h_1$, то

$$b_F\left(r+b_T\left(r\right)\right) \le \sqrt{\omega}\Big(b\gamma_1\gamma_2\left(r+\omega h_1+\gamma_1 r\right)^2 +$$
$$+\left(a\gamma_2+\gamma_1\right)\left(r+\omega h_1+\gamma_1 r\right)+h_1\Big) =$$
$$= \sqrt{\omega}\Big(b\gamma_1\gamma_2\left(\left(1+\gamma_1\right)r+\omega h_1\right)^2 +$$
$$+\left(a\gamma_2+\gamma_1\right)\left(\left(1+\gamma_1\right)r+\omega h_1\right)+h_1\Big).$$

Неравенство (9) обеспечивает существование положительного решения неравенства

$$\sqrt{\omega}\Big(b\gamma_1\gamma_2\left(\left(1+\gamma_1\right)r+\omega h_1\right)^2 +$$
$$+\left(a\gamma_2+\gamma_1\right)\left(\left(1+\gamma_1\right)r+\omega h_1\right)+h_1\Big) \le \gamma_0 r,$$

а следовательно, и неравенства $b_F\left(r+b_T\left(r\right)\right) < \|K_P\|^{-1} r$. Теперь мы находимся в условиях теоремы 1, применение которой завершает доказательство.

Теорема доказана.

В заключение отметим, что теорема 1 может служить источником получения достаточных признаков разрешимости других типов с применением иных теорем о неподвижных точках.

Библиографические ссылки

1. *Ван дер Поль Б.* Нелинейная теория электрических колебаний : монография. – М. : Связьиздат, 1935. – 42 с.

2. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений : монография. – М. : Мир, 1964. – 466 с.

3. *Бойчук А. А.*, *Чуйко С. М.* Автономные краевые задачи в критических случаях. Автономные периодические краевые задачи в критических случаях : Препринт. – Киев, 1991. – 50 с.

4. *Самойленко А. М.*, *Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач : монография. – Киев : Наук. думка, 1986. – 224 с.

5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний : монография. – М. : Гостехиздат, 1956. – 491 с.

6. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием : монография. – М. : Наука, 1969. – 288 с.

7. *Вайнберг М. М.*, *Треногин В. А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие // Успехи математических наук. – 1962. – Т. 17. – № 2(104). – С. 13–75.

8. *Куфнер А.*, *Фучик С.* Нелинейные дифференциальные уравнения : монография. – М. : Наука, 1988. – 304 с.

9. *Абдуллаев А. Р.*, *Бурмистрова А. Б.* Элементы теории топологических нетеровых операторов : монография. – Челябинск, 1994. – 93 с.

10. *Треногин В. А.* Функциональный анализ : монография. – Изд. 3-е, испр. – М. : Физматлит, 2002. – 488 с.

A. R. Abdullaev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Perm State Technical University
A. A. Savochkina, Perm State Technical University

Periodic Solution of Pol van der Equation with Deviating Argument

The solvability conditions (existence of solution) of Pol van der equation with deviating argument are established.

Key words: Pol van der equation, periodic problem, solution existence.