

УДК 539.3+534.1

**В. П. Тарануха**, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет  
**В. Е. Лялин**, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИСКОВ УСТРОЙСТВ ХРАНЕНИЯ ДАННЫХ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Приводятся конечно-разностные уравнения собственных колебаний для характерных точек сетки, сочетающих неоднородные граничные условия. Для решения указанной задачи использована полурегулярная радиальная сетка (регулярная по углу  $\varphi$  и нерегулярная по радиусу  $r$ ).

**Ключевые слова:** устройства хранения данных, собственные колебания диска.

Диски устройств резервного копирования и хранения информации идентифицируются круглыми тонкими пластинами [1].

Задачи о колебаниях круглых пластин при неоднородных граничных условиях возникают в связи с проблемой конструктивной настройки отдельных составляющих спектра собственных колебаний пластины на определенные частоты. Такая настройка на нерезонансные частоты может быть осуществлена регулированием условий закрепления пластин на внутреннем или наружном контуре.

Некоторые подобные задачи, по-видимому, могут быть решены методом Галеркина, Ритца и другими вариационными методами, если записать исходную функцию, в форме которой ищется решение с помощью  $R$ -функций Рвачева В. Л. [2–4] в виде, удовлетворяющем геометрическим граничным условиям. Для этого должен быть составлен логический предикат существования функции, который затем выражается аналитически через  $R$ -функции.

Однако это (для сложного неоднородного контура) часто приводит к громоздким выражениям для исходной функции, что затрудняет решение задачи в целом.

Метод сеток лишен многих недостатков, свойственных другим приближенным методам, и универсален при решении динамических задач для неоднородных граничных условий сложного вида [5].

В настоящей работе приводятся выражения в конечных разностях для уравнений собственных колебаний круглых тонких изотропных пластинок (дисков) при точной записи выражений для контурных точек (уточненные уравнения) с исключенными законтурными точками. Конечно-разностное уравнение для приведенной поперечной силы на контуре диска ( $Q_L = 0$ ) использовано для исключения второго ряда законтурных точек. Законтурные точки первого ряда исключены с помощью конечно-разностного выражения для уравнения изгибающего момента на контуре ( $M_L = 0$ ). Приводятся формулы для исключения законтурных точек.

При решении указанной задачи использована радиальная (полярная) полурегулярная сетка (регуляр-

ная по углу  $\varphi$  и нерегулярная по радиусу  $r$ ). Применение полурегулярной радиальной сетки вызвано формой пластинки и условием концентрации массы элементарных площадок в центре тяжести площадки, вызывающим неравномерное расположение точек по радиусу (рис. 1).

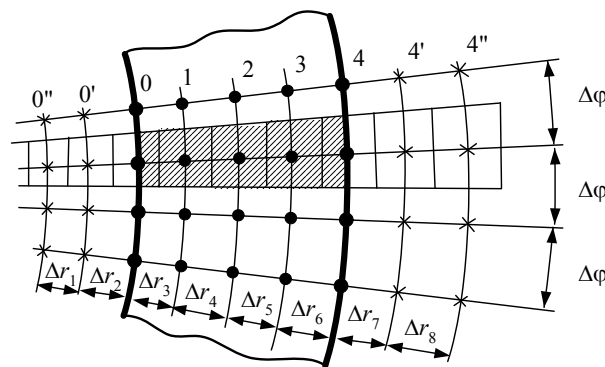


Рис. 1. Расположение точек в полурегулярной радиальной сетке

В случае круглой пластинки построение регулярной сетки требует предварительного решения системы уравнений для установления размеров площадок, дающих регулярный шаг сетки вдоль радиуса  $r$ .

Составлены уравнения для характерных точек, сочетающих различные неоднородные граничные условия.

Рассматриваются круглые тонкие пластинки при малых деформациях. Уравнение собственных колебаний таких пластинок для точки  $i$  сетки можем записать в виде [6]

$$s_i \nabla \nabla w_i - \lambda_i w_i = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } \lambda_i = (\mu_i / D) p^2 = \left[ (2\pi)^2 / D \right] \mu_i f^2, \quad (2)$$

$$D = Eh^3 / [12(1 - \sigma^2)], \quad \mu_i = \mu s_i = (\gamma / g) h s_i.$$

Здесь и в дальнейшем приняты следующие обозначения:  $\nabla \nabla$  – бигармонический оператор;  $r$ ,  $\varphi$  –

переменные полярной системы координат;  $w(r, \varphi)$  – функция прогибов;  $\mu_i = \mu s_i$  – масса площадки, прилегающей к точке  $i$ ;  $\mu = (\gamma/g)h$  – масса на единицу площади;  $s_i$  – площадь площадки, прилегающей к точке  $i$ ;  $\gamma$  – удельный вес материала пластинки;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $h$  – толщина пластинки;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости материала;  $r_k, r_i, r_l$  – радиусы точек сетки (рис. 2);  $\Delta r_{ij} = r_i - r_j$  – радиальные шаги сетки (рис. 2);  $\Delta \varphi$  – угловой шаг сетки;  $w_i, w_k, \dots, w_v$  – значения прогибов в соответствующих точках;  $M_L$  – изгибающий момент в круговом сечении  $L$ ;  $H_L$  – крутящий момент в сечении  $L$ ;  $N_L$  – поперечная (перерезывающая) сила в сечении  $L$ ;  $Q_L = N_L - (\partial H_L / \partial \varphi)$  – приведенная поперечная сила.

Расположение системы точек в полурегулярной радиальной сетке и параметры сетки показаны на рис. 1 и 2.

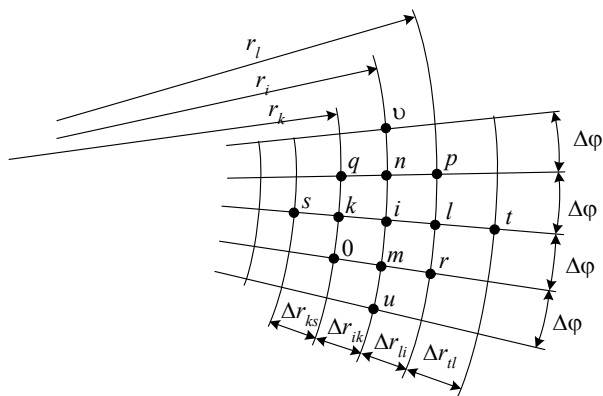


Рис. 2. Параметры полурегулярной радиальной сетки

Для сокращения записи конечно-разностных уравнений вводим две системы условных обозначений [5]: систему  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 28$ ) и систему  $a_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 28$ ).

Граничные условия на свободной части контура пластинки имеют вид

$$M_L = 0; \tag{3}$$

$$Q_L = 0. \tag{4}$$

Из граничного условия (3) определяются формулы для исключения первого ряда законтурных точек для наружного и внутреннего свободного контура.

Для вывода формул исключения второго ряда законтурных точек используем выражение для граничного условия (4) в конечных разностях.

Для наружного контура (точка  $i_2$  на рис. 3):

$$w_i = -w_q (a_0/a_7) - w_n (a_1/a_7) - w_p (a_2/a_7) - w_s (a_3/a_7) - w_k (a_4/a_7) - w_l (a_5/a_7) - w_t (a_6/a_7) - w_0 (a_0/a_7) - w_m (a_1/a_7) - w_r (a_2/a_7). \tag{5}$$

Для внутреннего контура (точка  $i_1$  на рис. 3):

$$w_s = -w_q (a_0/a_3) - w_n (a_1/a_3) - w_p (a_2/a_3) - w_k (a_4/a_3) - w_l (a_5/a_3) - w_t (a_6/a_3) - w_0 (a_0/a_3) - w_m (a_1/a_3) - w_r (a_2/a_3). \tag{6}$$

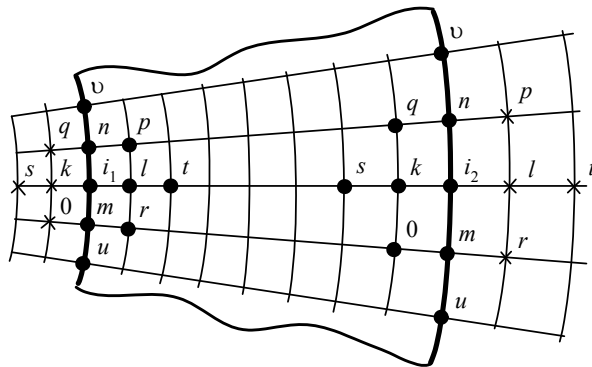


Рис. 3. Расположение точек сетки относительно контура

В формулы (5) и (6) входят законтурные точки первого ряда. Проведя ряд преобразований, выражение (5) можно записать в виде

$$w_i = -w_i B_0 - w_k B_1 - w_m B_2 - w_n B_2 - w_0 B_3 - w_q B_3 - w_s B_4 - w_t B_5 - w_u B_5. \tag{7}$$

Аналогично для выражения (6):

$$w_s = -w_i B_6 - w_l B_7 - w_m B_8 - w_n B_8 - w_p B_9 - w_r B_9 - w_t B_{10} - w_u B_{11} - w_v B_{11}. \tag{8}$$

Для коэффициентов  $B_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 17$ ) здесь и в дальнейшем введены следующие обозначения:

$$B_0 = (2a_2 a_{22} + a_5 + a_6) / a_7; \quad B_1 = (a_6 a_{20} + a_4) / a_7;$$

$$B_2 = (a_2 a_{21} + a_6 a_{22} + a_1) / a_7; \quad B_3 = (a_2 a_{20} + a_0) / a_7;$$

$$B_4 = a_3 / a_7; \quad B_5 = a_2 a_{22} / a_7;$$

$$B_6 = (2a_0 a_{19} + a_4 a_{17} + a_5) / a_3; \quad B_7 = (a_4 a_{18} + a_6) / a_3;$$

$$B_8 = (a_0 a_{17} + a_4 a_{19} + a_1) / a_3; \quad B_9 = (a_0 a_{18} + a_2) / a_3;$$

$$B_{10} = a_7 / a_3; \quad B_{11} = a_0 a_{19} / a_3;$$

$$B_{12} = b_{22} (\Delta r_{li})^2 / \Delta r_{ik}; \quad B_{13} = 1 - b_{22} \Delta r_{li};$$

$$B_{14} = (1/6) \Delta r_{li} \Delta r_{ik} (b_{25} + b_{27}); \quad B_{15} = (b_{27} + b_{28}) (\Delta r_{li})^2;$$

$$B_{16} = (1 - b_{22} \Delta r_{li}) b_{27} (\Delta r_{li})^2; \quad B_{17} = b_{25} / b_{27}.$$

Для вывода формул исключения первого ряда законтурных точек для жестко закрепленного контура (рис. 4) разложим дискретную функцию колебаний вдоль радиуса  $r$  в ряд Тейлора:

$$w(r) \sim w(a) + \frac{\partial w(a)}{\partial r} \frac{r-a}{1!} + \frac{\partial^2 w(a)}{\partial r^2} \frac{(r-a)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^n w(a)}{\partial r^n} \frac{(r-a)^n}{n!};$$

$$w_i = w_k (B_{12}/B_{13}). \tag{10}$$

При  $\Delta r_{ii} = \Delta r_{ik} = \dots = \text{const}$  (регулярная сетка) последняя формула принимает вид  $w_i = w_k$ .

для точки  $a = r_i$ , принимая дискретное значение аргумента  $r = r_i$ ,

$$w_i = w_i + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_i \frac{r_i - r_i}{1!} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)_i \frac{(r_i - r_i)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\partial^n w}{\partial r^n}\right)_i \frac{(r_i - r_i)^n}{n!}. \tag{9}$$

Здесь  $r_i - r_i = \Delta r_{ii}$ .

Используя выражения для производных в полурегулярной полярной сетке из [3] и удерживая три члена в разложении (9), получим экстраполяционную формулу для исключения законтурных точек первого ряда для жестко закрепленного контура:

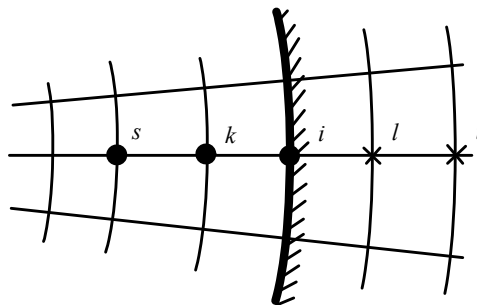


Рис. 4. Расположение точек вдоль радиуса на жестко закрепленном контуре

Формулы исключения для наружного и внутреннего контуров сведены в табл. 1.

Таблица 1. Формулы исключения законтурных точек

Вид контура		№ п/п	Формулы исключения
Свободный	наружный	1	$w_i = w_s a_{21} + w_k a_{20} + w_m a_{22} + w_n a_{22}$
		2	$w_i = -w_l B_0 - w_k B_1 - w_m B_2 - w_n B_2 - w_o B_3 - w_q B_3 - w_s B_4 - w_u B_5 - w_v B_5$
	внутренний	3	$w_k = w_l a_{17} + w_l a_{18} + w_m a_{19} + w_n a_{19}$
		4	$w_s = -w_l B_6 - w_l B_7 - w_m B_8 - w_n B_8 - w_p B_9 - w_r B_9 - w_t B_{10} - w_u B_{11} - w_v B_{11}$
Жестко закрепленный	наружный	5	$w_i = w_k (B_{12}/B_{13})$
	внутренний	6	$w_k = w_l (B_{13}/B_{12})$

С использованием формул исключения из этой таблицы составлены уравнения колебаний с исключенными законтурными точками для характерных положений точки, сочетающей неоднородные граничные условия. Результаты сведены в табл. 2. Для сокращения записи коэффициентов вводится четвертая система обозначений:

$$A_0 = 2a_{11}a_{22} + a_{15}a_{21} + a_{14} - a_{16}B_0;$$

$$A_1 = a_{15}a_{20} + a_{13} - a_{16}B_1;$$

$$A_2 = a_{11}a_{21} + a_{15}a_{22} + a_{10} - a_{16}B_2;$$

$$A_3 = a_{11}a_{20} + a_9 - a_{16}B_3; \quad A_4 = a_{12} - a_{16}B_4;$$

$$A_5 = a_{11}a_{22} + a_8 - a_{16}B_5;$$

$$A_6 = 2a_9a_{19} + a_{13}a_{17} + a_{14} - a_{12}B_6;$$

$$A_7 = a_{13}a_{18} + a_{15} - a_{12}B_7;$$

$$A_8 = a_9a_{17} + a_{13}a_{19} + a_{10} - a_{12}B_8;$$

$$A_9 = a_9a_{18} + a_{11} - a_{12}B_9;$$

$$A_{10} = a_{16} - a_{12}B_{10}; \quad A_{11} = a_9a_{19} + a_8 - a_{12}B_{11};$$

$$A_{12} = (B_{12}/B_{13})a_{16} + a_{14}; \quad A_{13} = (B_{13}/B_{12})a_{12} + a_{14};$$

$$A_{14} = a_{22}a_{16} + a_{11}; \quad A_{15} = a_{20}a_{16} + a_{14};$$

$$A_{16} = a_{21}a_{16} + a_{15}; \quad A_{17} = a_{12}a_{17} + a_{13};$$

$$A_{18} = a_{12}a_{18} + a_{14}; \quad A_{19} = a_{12}a_{19} + a_9;$$

$$A_{20} = A_0 - a_{11}a_{22}; \quad A_{21} = A_2 - a_{11}a_{21};$$

$$A_{22} = (B_{12}/B_{13})a_{11} - a_{16}B_3 + a_9; \quad A_{23} = A_5 - a_1a_{22};$$

$$A_{24} = A_6 - a_9a_{19}; \quad A_{25} = A_8 - a_9a_{17};$$

$$A_{26} = (B_{13}/B_{12})a_9 - B_9a_{12} + a_{11}; \quad A_{27} = A_{11} - a_9a_{19}.$$

Таблица 2. Уравнения для характерных точек сетки на пластинке

№ п/п	№ точки	№ рис.	$w_v$	$w_q$	$w_n$	$w_p$	$w_s$	$w_k$	$w_i$	$w_l$	$w_t$	$w_0$	$w_m$	$w_r$	$w_u$
1	3	5	$A_5$	$A_3$	$A_2$		$A_4$	$A_1$	$A_0 - \lambda_1$			$A_3$	$A_2$		$A_5$
2	3	5	$A_{11}$		$A_8$	$A_9$			$A_6 - \lambda_1$	$A_7$	$A_{10}$		$A_8$	$A_9$	$A_{11}$
3	4-10	5	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$		$a_{12}$	$a_{13}$	$A_{12} - \lambda_1$			$a_9$	$a_{10}$		$a_8$

Окончание табл. 2

№ п/п	№ точки	№ рис.	$w_v$	$w_q$	$w_n$	$w_p$	$w_s$	$w_k$	$w_i$	$w_l$	$w_r$	$w_0$	$w_m$	$w_r$	$w_u$
4	1–10	5	$a_8$		$a_{10}$	$a_{11}$			$A_{13} - \lambda_1$	$a_{15}$	$a_{16}$		$a_{10}$	$a_{11}$	$a_8$
5	3–6	5	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$A_{14} - \lambda_1$	$a_{15}$	$a_{16}$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_8$
6	4–6	5	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$A_{14}$	$a_{12}$	$a_3$	$A_{15} - \lambda_1$	$A_{16}$		$a_9$	$a_{10}$	$A_{14}$	$a_8$
7	1–6	5	$a_8$	$A_{19}$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$A_{17}$	$A_{18} - \lambda_1$	$a_{15}$	$a_{16}$	$A_{19}$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_8$
8	5–8	5	$A_5$	$A_3$	$A_2$		$A_4$	$A_1$	$A_{20} - \lambda_1$			$A_{22}$	$A_{21}$		$A_{23}$
9	0–8	5	$A_{11}$		$A_8$	$A_9$			$A_{24} - \lambda_1$	$A_7$	$A_{10}$		$A_{25}$	$A_{26}$	$A_{27}$
10	4–17	5	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$		$a_{12}$	$a_{13}$	$A_{15} - \lambda_1$	$A_{16}$		$a_9$	$a_{10}$		$a_8$
11	1–17	5	$a_8$		$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$		$A_{18} - \lambda_1$	$a_{15}$	$a_{16}$		$a_{10}$	$a_{11}$	$a_8$
12	5–12	5	$A_{23}$	$A_{22}$	$A_{21}$		$A_4$	$A_1$	$A_{20} - \lambda_1$			$A_3$	$A_2$		$A_5$
13	0–12	5	$A_{27}$		$A_{25}$	$A_{26}$			$A_{24} - \lambda_1$	$A_7$	$A_{10}$		$A_8$	$A_9$	$A_{11}$
14	5–17	5		$A_{22}$			$A_4$	$A_1$	$A_{20} - \lambda_1$			$A_{22}$			
15	0–17	5				$A_{26}$			$A_{24} - \lambda_1$	$A_7$	$A_{10}$			$A_{26}$	

Для указания расположения характерных точек на рис. 5 условно изображена круглая пластинка с нанесенной сеткой, сочетающая неоднородные граничные условия различного вида. При записи номера точки в табл. 2 записываются ее координаты, причем первым записывается номер окружности (например, 1–5 означает точку на пересечении окружности 1 с радиусом 5).

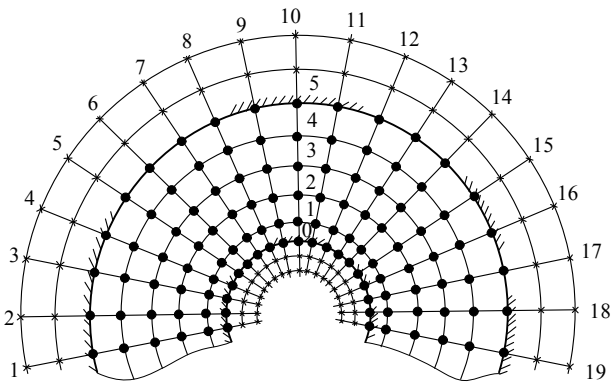


Рис. 5. Расположение характерных точек, сочетающих неоднородные граничные условия

Для точек на контуре пластинки половина площадки, прилегающей к точке, расположена за краем пластинки, поэтому в уравнение колебаний вводится коэффициент отношения площадей  $k = s_l/s_i$ , где  $s_l$  – площадь законтурной части площадки. Величина  $\lambda_i$  в этом случае относится только к части площадки, расположенной на пластинке.

#### Библиографические ссылки

1. Строллинг В. Беспроводные линии связи и сети : пер. с англ. – М. : Издат. дом «Вильямс», 2003. – 640 с.
2. Рвачев В. И. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов // ДАН СССР. – Т. 153. – 1963. – № 4.
3. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. – М., 1965.
4. Рвачев В. Л., Ющенко Е. Л. О классе функций, удобных для аналитического описания геометрических образов // Кибернетика и техника вычислений. – Киев, 1964.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач : пер. с фр. – 2-е изд. – М., 2002. – 588 с.
6. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М. : Наука, 1985.

V. P. Taranukha, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

V. E. Lyalin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Izhevsk State Technical University

#### Mathematical Model of Disk Storage Device Natural Vibrations Based on Finite Difference Method

The finite-difference equations of natural oscillations for the characteristic grid points, which combine inhomogeneous boundary conditions, are presented. To solve the problem a semiregular radial grid (regular by angle and irregular by radius) was used.

**Key words:** data storage device, natural oscillations of a disk.