

УДК 532.5.011

Е. А. Савельева, магистрант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова  
 М. Р. Королева, кандидат физико-математических наук, Институт механики УрО РАН, Ижевск  
 С. Ю. Дадикина, Институт механики УрО РАН, Ижевск

## ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ \*

Проведено численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости с частицами. Течение жидкости описывается системой уравнений Навье – Стокса. Численное решение уравнений проведено методом конечных разностей на разнесенных сетках. Рассчитаны поля течения жидкости и траектории движения частиц в потоке.

**Ключевые слова:** двухфазное течение, несжимаемая жидкость, разнесенные сетки, траектории частиц, плоский канал.

Двухфазные среды часто встречаются в природе, в различных технических устройствах. Такие течения могут сопровождаться сложными процессами, такими как соударение, слияние частиц, осаждение частиц на твердые поверхности. Наиболее простыми являются смеси, которые состоят из двух фаз. Для описания свойств таких сред в настоящий момент используются два метода, основанные на подходах Лагранжа и Эйлера. В рамках подхода Эйлера можно учесть взаимное влияние несущей фазы и движущихся частиц, однако данный метод не позволяет отслеживать траекторию движения частиц дисперсной фазы. В рамках подхода Лагранжа можно определить траекторию движения каждой частицы в потоке, однако трудно учесть влияние частиц на среду. В данной работе описан алгоритм расчета двухфазных течений, который состоит в раздельном определении параметров потока и траекторий движущихся в нем частиц. Для описания течения вязкой несжимаемой жидкости используются уравнения Навье – Стокса [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho, u, v, p, \nu$  – плотность, компоненты вектора скорости  $\vec{V}$ , давление и коэффициент кинематической вязкости.

Положение отдельных частиц и их параметры определяются решением системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_p, \\ \frac{dy}{dt} &= v_p, \\ m \frac{du_p}{dt} &= f_x, \\ m \frac{dv_p}{dt} &= f_y, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x, y, u_p, v_p, m, f$  – координаты частицы, компоненты вектора скорости частицы  $\vec{V}_p$ , масса частицы  $m = \rho_p \frac{\pi d^3}{6}$  и силы, действующие на частицу в потоке. Предполагается, что частицы имеют сферическую форму, плотность частицы  $\rho_p$ , диаметр  $d$ , взаимодействие между частицами отсутствует. Проекции сил вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{\pi d^2}{4} C_x \rho \frac{|\vec{V} - \vec{V}_p| (u - u_p)}{2}, \\ f_y &= \frac{\pi d^2}{4} C_x \rho \frac{|\vec{V} - \vec{V}_p| (v - v_p)}{2}. \end{aligned}$$

Коэффициент сопротивления  $C_x$  при малых числах Рейнольдса совпадает с теоретическим значением, рассчитанным по формуле Стокса. При больших значениях числа Рейнольдса коэффициент сопротивления аппроксимируется различными зависимостями [2]. При числах Рейнольдса, не превышающих  $10^3$ , кривая сопротивления сферы хорошо аппроксимируется зависимостью

$$C_x = \frac{24}{Re_p} + \frac{4,4}{\sqrt{Re_p}} + 0,32, \quad (3)$$

где  $Re_p = \frac{|\vec{V} - \vec{V}_p| d}{\nu}$  – относительное число Рейнольдса.

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в плоском прямолинейном канале длиной  $L$ , высотой  $h$ . На входе в канал зададим значения компонент вектора скорости  $u, v$  и начальные скорости движения частиц  $u_p, v_p$ . На непроницаемых границах канала используем условие непротекания, на выходе из канала – условие нулевого нормального градиента вектора скорости.

Для решения исходных систем уравнений (1) и (2) введем прямоугольную сетку с шагами  $\Delta x, \Delta y$ .

Координаты узлов сетки определяются как

$$x_i = i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad i = 1..N, \quad j = 1..M.$$

Для согласования полей скорости и давления численное решение уравнений (1) проводилось на разнесенных сетках, при этом значения переменных скоростей и давления вычислялись в разных точках. Значения продольной компоненты скорости вычислялись в точках  $(i+1/2, j)$ , поперечной компоненты в точках  $(i, j+1/2)$ , давления в точках  $(i, j)$  (рис. 1).

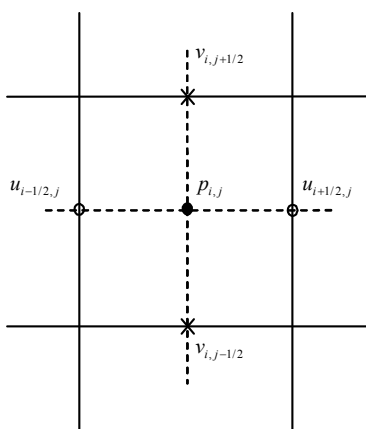


Рис. 1. Расположение узлов на разнесенной сетке

Для разностной аппроксимации уравнений (1) воспользуемся неявной схемой

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i+1/2,j}^n &= -\frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) + F_{i+1/2,j}, \\ v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j+1/2}^n &= -\frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) + G_{i,j+1/2}, \\ \frac{u_{i+1/2,j}^{n+1} - u_{i-1/2,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^{n+1} - v_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta y} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь выражения для величин  $F_{i+1/2,j}$  и  $G_{i,j+1/2}$  имеют вид

$$\begin{aligned} F_{i+1/2,j} &= -\frac{u_{i+1,j}^2 - u_{i,j}^2}{\Delta x} - \frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} + \\ &+ v \left( \frac{u_{i+3/2,j} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{u_{i+1/2,j+1} - 2u_{i+1/2,j} + u_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_{i,j+1/2} &= -\frac{(uv)_{i+1/2,j+1/2} - (uv)_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} - \frac{v_{i,j+1}^2 - v_{i,j}^2}{\Delta y} + \\ &+ v \left( \frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2} + v_{i-1,j+1/2}}{\Delta x^2} + \right. \\ &\left. + \frac{v_{i,j+3/2} - 2v_{i,j+1/2} + v_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Все параметры в формулах (5) и (6) берутся с  $n$ -го временного слоя и считаются известными. Аппроксимирующие выражения для значений скоростей в целочисленных точках приводятся в работе [3].

Аналогичные выражения можно записать для узлов сетки  $(i-1/2, j)$  и  $(i, j-1/2)$ , понизив индексы в формулах (5), (6) на единицу. Полученные выражения вместе с уравнениями (5) и (6) подставляют в уравнение неразрывности (4) и после преобразований получают разностное уравнение Пуассона для нахождения давления:

$$ap_{i,j}^{n+1} + bp_{i+1,j}^{n+1} + cp_{i-1,j}^{n+1} + dp_{i,j+1}^{n+1} + ep_{i,j-1}^{n+1} = f_{i,j}. \quad (7)$$

Значения коэффициентов в уравнении Пуассона и свободного члена  $f_{i,j}$  являются известными величинами.

Решение задачи движения несжимаемой жидкости в канале осуществляется с использованием алгоритма, предложенного и протестированного для ламинарных течений в каналах в работе [4]. Данный алгоритм содержит следующие этапы:

- по известным с предыдущего временного слоя значениям скоростей  $u_{i+1/2,j}^n$  и  $v_{i,j+1/2}^n$  по формулам (5), (6) вычисляются величины  $F_{i+1/2,j}$  и  $G_{i,j+1/2}$ ;

- зная правую часть уравнения Пуассона (7), решаем его методом Зейделя [5] и получаем распределение давления на новом временном слое  $p_{i,j}^{n+1}$ ;

- используем найденные значения давления  $p_{i,j}^{n+1}$  для определения скоростей потока  $u_{i+1/2,j}^{n+1}$  и  $v_{i,j+1/2}^{n+1}$  по формулам (4). На этом расчет текущего шага по времени заканчивается.

При использовании данного подхода к решению нет необходимости нахождения каких-либо поправок, так как скорость на каждой итерации по времени уже удовлетворяет уравнению неразрывности.

Эти шаги повторяются до установления решения. После получения установившегося режима течения можно определить траектории движения частиц в по-

токе. Разностные формулы, аппроксимирующие уравнения (2), запишем как

$$\begin{aligned}x_p^{n+1} &= x_p^n + \Delta t u_p^n, \\y_p^{n+1} &= y_p^n + \Delta t v_p^n, \\u_p^{n+1} &= u_p^n + \Delta t \frac{f_x}{m}, \\v_p^{n+1} &= v_p^n + \Delta t \frac{f_y}{m}.\end{aligned}$$

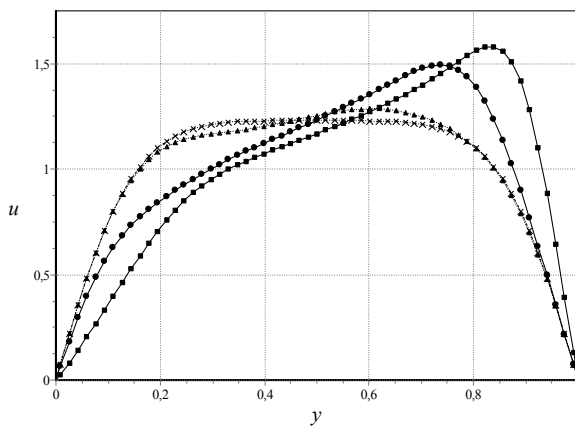
Значения скоростей в правых частях данных уравнений в проекциях сил берутся с нового временного слоя. Таким образом, расчет траекторий частиц ведется по явной схеме, а расчет скоростей – по неявной.

Задача течения двухфазного потока в канале решалась в безразмерных переменных. Характерными величинами являлись скорость на входе в канал и высота канала. На левой входной границе задава-

лись следующие значения компонент скорости:  $u = 1$ ,  $v = 0,5$ . Число Рейнольдса потока принималось равным 500. Расчет течения проводился до установления. Профили продольной и поперечной компонент вектора скорости, соответствующие установившемуся режиму, показаны на рис. 2, 3.

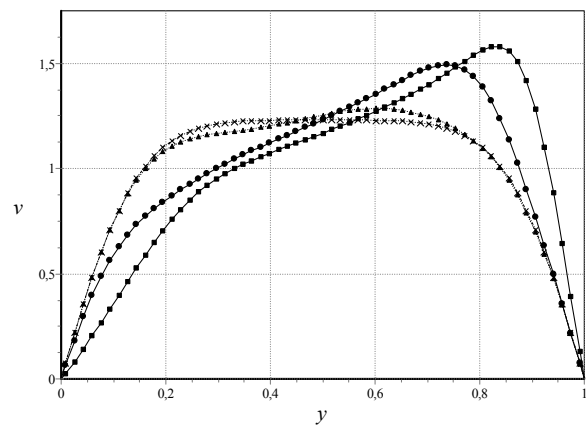
После достижения установившегося режима течения были найдены траектории частиц, выпущенных из различных точек входного сечения. Плотность частиц превышала плотность жидкости в 3 раза. Траектории частиц представлены на рис. 4.

Траектории движения частиц при установившемся режиме течения повторяют линии тока течения. Частицы, увлекаемые потоком вязкой несжимаемой жидкости, сначала движутся по направлению к верхней стенке канала, затем опускаются и во второй половине канала перемещаются параллельно ограничивающим поток стенкам. В данном случае в потоке нет частиц, которые осаждались бы на стенках.



■ –  $x = 1,67$ , ● –  $x = 3,3$ , ▲ –  $x = 5,07$ , × –  $x = 8,35$

Рис. 2. Профили продольной компоненты скорости в различных поперечных сечениях



■ –  $x = 1,67$ , ● –  $x = 3,3$ , ▲ –  $x = 5,07$ , × –  $x = 8,35$

Рис. 3. Профили поперечной компоненты скорости в различных поперечных сечениях

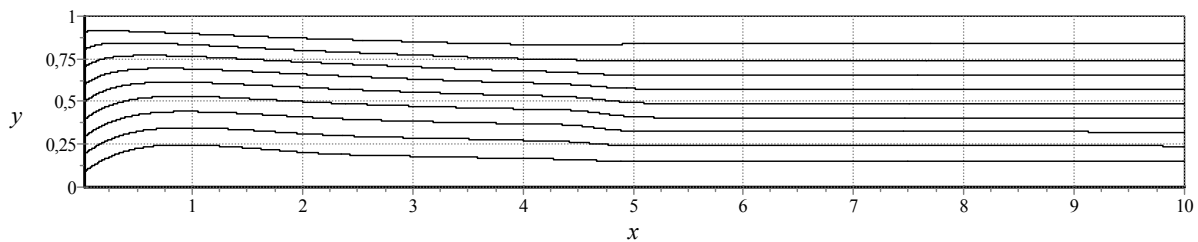


Рис. 4. Траектории движения частиц в потоке

#### Библиографические ссылки

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Дрофа, 2003. – 842 с.
2. Юн А. А., Крылов Б. А. Расчет и моделирование турбулентных течений с теплообменом, смешением, химическими реакциями и двухфазных течений в программном комплексе Fastest-3D : учеб. пособие. – М. : Изд-во МАИ, 2007. – 116 с. : ил.

3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей : в 2 т. – Т. 2. Методы расчета различных течений. – М. : Мир, 1991. – 552 с.

4. Метод численного решения уравнений Навье – Стокса в переменных скорость – давление / Е. В. Бруцкий, А. Г. Костин, Е. И. Никифорович, Н. В. Розумнюк // Прикладна гідромеханіка. – 2008. – Т. 10. – № 2. – С. 13–23.

5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – Т. 1. – М. : Мир, 1990. – 384 с.

*E. A. Savelyeva*, Master's degree student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
*M. R. Koroleva*, PhD (Physics and Mathematics), Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences  
*S. Yu. Dadikina*, Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Izhevsk

**Two-Phase Flow of Viscous Incompressible Fluid in Flat Straight Channel**

*The paper presents the investigation of incompressible viscous fluid flow with particles. Fluid flow is described by Navier-Stokes equations. Numerical solution of equations is carried out by the finite difference method on staggered grids. Fields of fluid flow and trajectories of particles motion in the flow are calculated.*

**Key words:** two-phase flow, incompressible fluid, staggered grids, trajectories of particles, flat channel.

УДК 512.643.5

**М. Я. Михлин**, аспирант, Череповецкий государственный университет

**РАСПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
 ИМПРИМИТИВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ**

*Рассматривается расположение собственных значений импримитивных неотрицательных неразложимых матриц размера  $n \times n$ . На внешней окружности всегда располагаются  $k$  ( $2 \leq k \leq n$ ) собственных значений с максимальным модулем, а на остальных окружностях их может быть не обязательно  $k$  штук.*

**Ключевые слова:** матрица, собственные значения, индекс импримитивности.

**Теорема [1].** Совокупность всех характеристических чисел  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  неразложимой матрицы  $A \in M_n$ , рассматриваемая как система точек в комплексной  $\lambda$ -плоскости, переходит сама в себя при повороте этой плоскости на угол  $2\pi/k$ . При  $k > 1$  перестановкой рядов можно матрицу  $A$  привести к следующему циклическому виду, где вдоль диагонали стоят квадратные блоки:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Импримитивная неразложимая неотрицательная матрица  $A$  должна иметь специальную форму, которая зависит от числа  $k$  собственных характеристических чисел  $\lambda_0 = \rho(A), \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ , модули которых равны спектральному радиусу  $\rho(A)$ , являются корнями уравнения  $\lambda^k - \rho^k(A) = 0$  и располагаются весьма регулярным образом.

**Следствие.** Пусть  $A \in M_n$ , и предположим, что матрица  $A$  неотрицательна и неразложима и множество  $S = \{\lambda_n = \rho(A), \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_{n-k+1}\}$  собственных значений с максимальным модулем  $\rho(A)$  содержит в точности  $k$  различных элементов. Тогда кратность любого собственного значения  $\lambda_j \in S$  равна 1 и  $S = \{e^{2\pi ip/k} \rho(A) : p = 0, 1, \dots, k-1\}$ , т. е. максимальные по модулю собственные значения – это не что иное, как  $k$  корней из единицы степени  $k$ . Более того, если  $\lambda$  – произвольное собственное значение матрицы  $A$ , то  $e^{2\pi ip/k} \lambda$  тоже будет ее собственным значени-

ем для всех  $p = 0, 1, 2, \dots, k-1$  ([2], следствие 8.4.6, стр. 601).

**Замечание 1.** Если матрица  $A \geq 0$  неразложима и имеет  $k > 1$  собственных значений с максимальным модулем, то всякое ненулевое собственное значение матрицы  $A$  лежит на какой-то окружности с центром в 0, проходящей в точности через  $k$  собственных значений матрицы  $A$ , которые образуют на ней равномерную сетку ([2], замечание 8.4.7, стр. 603). В частности,  $k$  должно быть делителем общего числа ненулевых элементов собственных значений для  $A$ .

Вообще говоря, замечание 1 не верно. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Исследуем ее свойства с помощью программного продукта Maple 14. Структура матрицы совпадает с (1). На рис. 1 изображен граф матрицы (2). Анализируя данный граф, можно сделать вывод, что матрица является неразложимой, так как граф сильно связан. Характеристический многочлен матрицы  $P_A(t) = t^9 - t^6 - 2t^3 + 1$ . Наибольший общий делитель разностей степеней коэффициентов равен 3, соответ-