E. A. Savelyeva, Master's degree student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
M. R. Koroleva, PhD (Physics and Mathematics), Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences
S. Yu. Dadikina, Institute of Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy of Sciences, Izhevsk

Two-Phase Flow of Viscous Incompressible Fluid in Flat Straight Channel

The paper presents the investigation of incompressible viscous fluid flow with particles. Fluid flow is described by Navier-Stokes equations. Numerical solution of equations is carried out by the finite difference method on staggered grids. Fields of fluid flow and trajectories of particles motion in the flow are calculated.

Key words: two-phase flow, incompressible fluid, staggered grids, trajectories of particles, flat channel.

УДК 512.643.5

М. Я. Михлин, аспирант, Череповецкий государственный университет

РАСПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПРИМИТИВНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ МАТРИЦ

Рассматривается расположение собственных значений импримитивных неотрицательных неразложимых матриц размера n×n. На внешней окружности всегда располагаются k (2 ≤ k ≤ n) собственных значений с максимальным модулем, а на остальных окружностях их может быть не обязательно k штук.

Ключевые слова: матрица, собственные значения, индекс импримитивности.

Теорема [1]. Совокупность всех характеристических чисел $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ неразложимой матрицы $A \in M_n$, рассматриваемая как система точек в комплексной λ-плоскости, переходит сама в себя при повороте этой плоскости на угол $2\pi/k$. При $k > 1$ перестановкой рядов можно матрицу A привести к следующему цикличскому виду, где вдоль диагонали стоят квадратные блоки:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Импримитивная неразложимая неотрицательная матрица A должна иметь специальную форму, которая зависит от числа k собственных характеристических чисел $\lambda_0 = \rho(A), \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, модули которых равны спектральному радиусу $\rho(A)$, являются корнями уравнения $\lambda^k - \rho^k(A) = 0$ и располагаются весьма регулярным образом.

Следствие. Пусть $A \in M_n$, и предположим, что матрица A неотрицательна и неразложима и множество $S = \{ \lambda_n = \rho(A), \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_{n-k+1}\}$ собственных значений с максимальным модулем $\rho(A)$ содержит в точности k различных элементов. Тогда кратность любого собственного значения $\lambda_l \in S$ равна 1 и $S = \{e^{2\pi ip/k} \rho(A)\colon p = 0, 1, \ldots, k-1\}$, т. е. максимальные по модулю собственные значения – это не что иное, как k корней из единицы степени k. Более того, если λ – произвольное собственное значение матрицы A, то $e^{2\pi ip/k}\lambda$ тоже будет ее собственным значением для всех $p = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ ([2], следствие 8.4.6, стр. 601).

Замечание 1. Если матрица $A \geq 0$ неразложима и имеет $k > 1$ собственных значений с максимальным модулем, то всякое ненулевое собственное значение матрицы A лежит на какой-то окружности с центром в 0, проходящей в точности через k собственных значений матрицы A, которые образуют на ней равномерную сетку ([2], замечание 8.4.7, стр. 603). В частности, k должно быть делителем общего числа ненулевых элементов собственных значений для A.

Вообще говоря, замечание 1 не верно.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Исследуем ее свойства с помощью программного продукта Maple 14. Структура матрицы совпадает с (1). На рис. 1 изображен граф матрицы (2). Анализируя данный граф, можно сделать вывод, что матрица является неразложимой, так как граф сильно связен. Характеристический многочлен матрицы $P_A(t) = t^9 - t^6 - 2t^3 + 1$. Наибольший общий делитель разностей степеней коэффициентов равен 3, соответ-

Получено 22.11.13

ственно, индекс импримитивности $k = 3$. На рис. 2 приведен спектр матрицы. На данном спектре три окружности, на каждой из которых находятся по три точки (собственные значения матрицы, $k = 3$). Для матрицы (2) замечание 1 верно, так как количество собственных значений матрицы на каждой окружности равно индексу импримитивности $k = 3$.

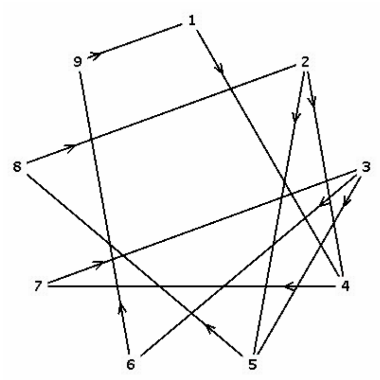

Рис. 1. Граф матрицы (2)

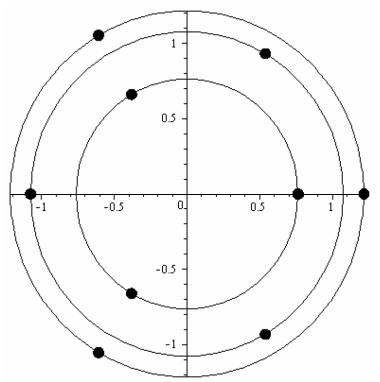

Рис. 2. Спектр матрицы (2)

Рассмотрим матрицу

$$A = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right] \qquad (3)$$

Исследуем ее свойства с помощью программного продукта Maple 14. Структура матрицы совпадает с (1). На рис. 3 изображен граф матрицы (3). Анализируя данный граф, можно сделать вывод, что матрица является неразложимой, так как граф сильно связен.

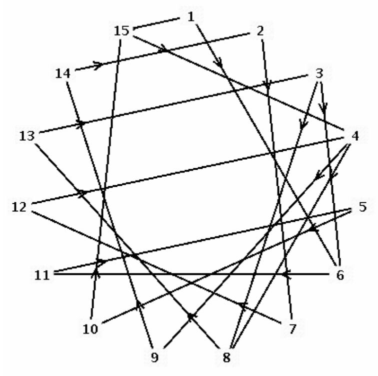

Рис. 3. Граф матрицы (3)

Характеристический многочлен матрицы $P_A(t) = t^{15} - t^{12} - 2t^9 + t^6 + t^3 - 1$. Наибольший общий делитель разностей степеней коэффициентов равен 3, соответственно, индекс импримитивности $k = 3$. На рис. 4 приведен спектр матрицы.

На данном спектре три окружности. На окружности максимального радиуса находятся три точки (собственные значения матрицы, $k = 3$). В соответствии с замечанием 1 на каждой окружности должно находиться по $k = 3$ точек. Но в то же время на двух других окружностях находятся по шесть точек, что противоречит замечанию 1. Расстотрим матрицу

$$A = \left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right] \qquad (4)$$

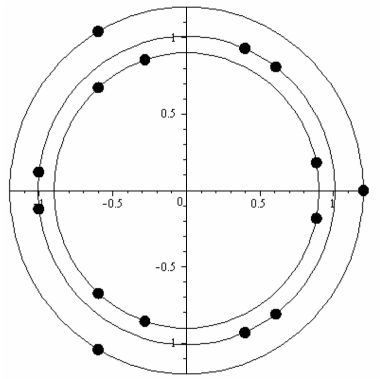

Рис. 4. Спектр матрицы (3)

Исследуем ее свойства с помощью программного продукта Maple 14. Структура матрицы совпадает с (1). На рис. 5 изображен граф матрицы (4). Анализируя данный граф, можно сделать вывод, что матрица является неразложимой, так как граф сильно связен. Характеристический многочлен матрицы $P_A(t) = t^{20} - t^{16} - 2t^{12} + 2t^8 - 1$.

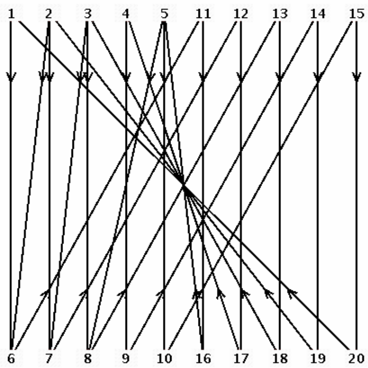

Рис. 5. Граф матрицы (4)

Наибольший общий делитель разностей степеней коэффициентов равен 4, соответственно, индекс импримитивности $k = 4$. На рис. 6 приведен спектр матрицы. На данном спектре четыре окружности. На окружности максимального радиуса находятся четыре точки (собственные значения матрицы, $k = 4$). В соответствии с замечанием 1 на каждой окружности должно находиться по $k = 4$ точек. Но в то же время на одной из окружностей находятся восемь точек, что противоречит замечанию 1, следовательно, оно не верно.

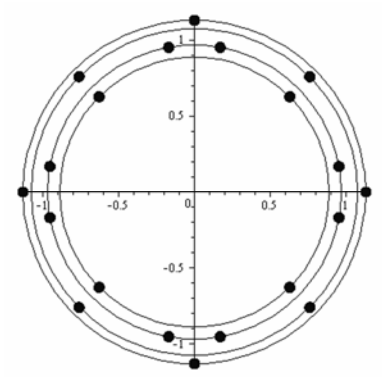

Рис. 6. Спектр матрицы (4)

Таким образом, замечание 1, приведенное в [2], не верно, так как не на всякой окружности лежит в точности k собственных значений матрицы. Количество собственных значений матрицы A, лежащих на одной окружности, пропоционально k.

Библиографические ссылки

1. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М. : Наука, 1968. – 576 с.

2. *Хорн Р.*, *Джонсон Ч.* Матричный анализ : пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 655 с.

M. Ya. Mikhlin, Post-graduate, Cherepovets State University

Disposition of Eigenvalues of Imprimitive Nonnegative Indecomposable Matrices

Disposition of eigenvalues of imprimitive nonnegative indecomposable matrices of n × n dimension is considered. As for the outer circle, k (2 ≤ k ≤ n) eigenvalues with the maximum module are always located there, and not obligatory k pieces of them are on the remaining circles.

Key words: matrix, eigenvalue, index of imprimitivity.