УДК 519.81

**М. А. Северин**, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

# СВОЙСТВА МНОЖЕСТВ, ВЫПУКЛЫХ В НЕКОТОРОЙ СОВОКУПНОСТИ НАПРАВЛЕНИЙ

*Рассматриваются множества, выпуклые в направлениях из некоторого множества K. Устанавливается, что такие K-выпуклые множества наследуют многие известные свойства обычных выпуклых множеств.*

**Ключевые слова:** *K*-выпуклые множества, линейные комбинации, выпуклая оболочка, направления.

Известно (см., например, [1, 2, 3]), что при построении различных обобщений выпуклых множеств используется следующая схема: выделяется какое-нибудь свойство выпуклых функций или множеств, а затем оно берется за основу в определении нового класса функций или множеств. В данной работе предлагается иной подход к построению: выполнение свойства, которое берется за основу, требуется не всюду, а лишь только на некотором заранее задаваемом множестве. Свойство, которое здесь является основополагающим, заключается в принадлежности отрезка, соединяющего две точки множества, самому множеству. При этом рассматриваются не все отрезки, а только те, которые параллельны заранее заданным направлениям. Если такое направление одно, то получается известный класс выпуклых в одном направлении множеств (см., например, [4]). На свойство выпуклости сразу в нескольких направлениях (в секторе направлений) впервые обращено внимание в [5]: оно там было получено как некоторая характеристика изучаемого в этой работе класса областей. В качестве определяющего свойства выпуклость во множестве направлений появляется в работах [6, 7]. В частности, в [7] начато систематическое изучение обсуждаемого класса множеств. В настоящей статье эти исследования продолжены. Получен ряд новых свойств выпуклых в множестве направлений множеств и обоснованы некоторые результаты, анонсированные в [7].

**1. Определение *K*-выпуклых множеств.** Обозначим через $[x, y]$ отрезок с конечными точками $x$, $y$ в пространстве $R^n$. Пусть $K$ – некоторое выпуклое множество в $R^n$. Приведем определение выпуклого в направлениях из множества $K$, или, более коротко, $K$-выпуклого множества.

***Определение 1.*** Множество $X$ в пространстве $R^n$ называется $K$-выпуклым множеством, если из $x, y \in X$, $\pm(x-y) \in K$ следует $[x, y] \subset X$.

Здесь $\pm(x - y) \in K$ означает, что по крайней мере один из векторов $(x - y)$, $(y - x)$ принадлежит $K$.

Напомним, что выпуклой линейной комбинацией конечного числа точек $a^i \in R^n, i = 1, 2, \ldots, s$ называется точка вида $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i a^i, \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, s.$

**Теорема 1.** Если $X$ – $K$-выпуклое множество, то оно содержит всевозможные выпуклые линейные комбинации любого конечного числа своих точек таких, что разность между любыми двумя из взятых точек принадлежит множеству $K$ (в дальнейшем – $K$-выпуклые комбинации).

*Доказательство.* По определению 1, множество $X$ содержит всевозможные выпуклые линейные комбинации любых двух своих точек $a^1, a^2$, если $\pm\left(a^1 - a^2\right) \in K$. Пусть $X$ содержит всевозможные $K$-выпуклые комбинации любых $s$ своих точек. Покажем, что такое же утверждение справедливо тогда и для любых $s+1$ точек $a^i \in X, i = 1, 2, \ldots, s.$ Здесь считается, что для любых двух точек $a^i, a^j, i \neq j,$ как из $s$ точек, так и из $s + 1$ точек, выполняется включение $\pm\left(a^i - a^j\right) \in K.$

Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда ни один из весовых коэффициентов не равен нулю. Тогда комбинацию точек можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i a^i = \left(1 - \alpha_{s+1}\right) \sum_{i=1}^{s} \beta_i a^i + \alpha_{s+1} a^{s+1},$$

$$\beta_i = \alpha_i \big/ \left(1 - \alpha_{s+1}\right) \geq 0, i = 1, 2, \ldots, s, \sum_{i=1}^{s} \beta_i = 1.$$

Разность $\sum_{i=1}^{s} \beta_i a^i - a^{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \beta_i \left(a^i - a^{s+1}\right)$ принадлежит множеству $K$, так как $a^i - a^{s+1} \in K$, $i = 1, 2, \ldots, s$ по условиям теоремы, а $K$-выпуклая линейная комбинация точек из $K$-выпуклого множества принадлежит этому множеству. Таким образом, отрезок $\left[\sum_{i=1}^{s} \beta_i a^i, a^{s+1}\right] \subset X.$ Значит, точка $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i a^i$ этого отрезка также принадлежит множеству $X$. Теорема доказана.

Аналогично выпуклой оболочке множества определим $K$-выпуклую оболочку.

***Определение 2.*** Наименьшее выпуклое в множестве направлений $K$ надмножество (в смысле теоретико-множественного включения) множества $X$ в $R^n$



Получено 28.11.13

называется выпуклой в множестве направлений $K$ оболочкой множества $X$ (или, более коротко, $K$-выпуклой оболочкой множества $X$) и обозначается $C_K(X)$.

Существование множества $C_K(X)$ в этом определении вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пересечение выпуклых в множестве направлений $K$ множеств $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ является выпуклым в множестве направлений $K$ множеством.

*Доказательство.* Если $x, y \in \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, то $x, y \in X_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, откуда следуют включения $[x, y] \subset X_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, если $\pm(x-y) \in K$. Указанное свойство имеет место из-за выпуклости в множестве направлений $K$ множеств $X_\lambda (\lambda \in \Lambda)$. Следовательно, $[x, y] \subset \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, что и требовалось доказать.

Заметим, что если $C(X)$ является выпуклой оболочкой множества $X$, то $C(X) \subset C_K(X)$ при любом множестве $K$. Это объясняется тем, что семейство всех выпуклых в множестве направлений $K$ надмножеств множества $X$ имеет своими элементами и все выпуклые множества, содержащие $X$.

**Теорема 3.** Выпуклая в конусе направлений $K$ оболочка множества $X$ совпадает с множеством всевозможных $K$-выпуклых линейных комбинаций точек из $X$.

*Доказательство.* Рассмотрим подмножество всевозможных $K$-выпуклых линейных комбинаций точек из $X$ – множество всех $K$-выпуклых линейных комбинаций точек из $X$, составленных не более чем из двух точек множества $X$. Обозначим его через $C^*(X)$. Множество $C^*(X)$ содержит $X$ и является $K$-выпуклым множеством. Первое очевидно, а во втором проще всего убедиться следующим образом. Геометрически множество всех выпуклых комбинаций, составленных из двух фиксированных точек означает отрезок, соединяющий эти точки. Таким образом, если две точки $x, y \in C^*(X), \pm(x-y) \in K$, то и отрезок, соединяющий их, принадлежит $C^*(X)$. Но это и значит, что множество $C^*(X)$ $K$-выпукло. Раз множество $C^*(X)$ $K$-выпукло и содержит $X$, то оно содержит и $C_K(X)$. Итак, $C_K(X) \subset C^*(X)$. Следовательно, $K$-выпуклая оболочка множества $X$ является подмножеством множества всевозможных $K$-выпуклых линейных комбинаций точек из $X$.

Обратное включение вытекает из следующих рассуждений. По теореме 1, $C_K(X)$ как $K$-выпуклое множество содержит всевозможные $K$-выпуклые линейные комбинации своих точек и, в частности, $K$-выпуклые линейные комбинации точек множества $X$, так что $C_K(X)$ включает в себя $K$-выпуклое множество, порожденное точками $X$. Следовательно, $C_K(X)$ совпадает с $K$-выпуклым множеством, порожденным точками $X$. Теорема доказана.

В заключение этого пункта приведем еще одно свойство $K$-выпуклых множеств.

**Теорема 5.** Пусть $G$ – $K$-выпуклое множество в $R^n$ и в $K$ имеется $(n-1)$ линейно независимых векторов $a^i, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда пересечение гиперплоскости, параллельной минимальному подпространству, содержащему систему векторов $a^i, i = 1, 2, \ldots, n-1$, и множества $G$ является выпуклым множеством.

*Доказательство.* Взяв любые две точки $x, y$ из сечения, указанного в теореме, заметим, что разность $x - y$ принадлежит минимальному подпространству, содержащему систему векторов $a_i, i = 1, 2, \ldots, n-1$, то есть $\pm(x-y) \in K$. В силу $K$-выпуклости множества $G$ отрезок $[x, y]$ должен принадлежать рассматриваемому сечению, что означает его выпуклость. Теорема доказана.

**2. Топологические свойства *K*-выпуклых множеств.** Пусть $K$ – открытое выпуклое множество. Тогда имеет место

**Теорема 1.** Для $K$-выпуклого множества $X$ справедливы следующие утверждения.

1. Замыкание $\overline{X}$ множества $X$ также является $K$-выпуклым множеством.

2. Если $a$ – внутренняя точка множества $X$, а $b$ принадлежит замыканию $\overline{X}$, то каждая точка отрезка $[a, b]$, $\pm(a-b) \in K$, кроме, быть может, $b$, является внутренней точкой множества $X$.

*Доказательство.* Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Возьмем число $\varepsilon, \varepsilon > 0$, настолько малым, что шаровая окрестность $U(a, \varepsilon)$ лежит в $X$. Более того, будем считать также, что каждая точка $x$ окрестности $U(a, \varepsilon)$ удовлетворяет условию $\pm(x-b) \in K$, что возможно в силу $\pm(a-b) \in K$ и открытости множества $K$.

Представим произвольную точку $c_t$ отрезка $[a, b]$, $c_t \neq b$, в виде $c_t = (1-t)a + tb, 0 \le t < 1$.

Для того чтобы показать, что $c_t$ – внутренняя точка множества $X$, достаточно проверить, что $U(c_t, (1-t)\varepsilon) \subset X$. С этой целью рассмотрим произвольную точку $x \in U(c_t, (1-t)\varepsilon)$. Из определения этой точки следует, что $\|x - c_t\| < (1-t)\varepsilon$. Кроме того, поскольку $b \in X$, можно взять точку $d$ в $X$ настолько близко к $b$, что $t\|b-d\| < (1-t)\varepsilon - \|x - c_t\|$, и, кроме того, $\pm(d-x) \in K$ для любого $x \in U(a, \varepsilon)$. Легко проверить, что $e = [1/(1-t)](x - td) \in U(a, \varepsilon) \subset X$.

Тогда имеем $x=(1-t)e+td\in[e,d]\subset X$, так как $\pm(e-d)\in K$. Это и показывает, что $U(c_t,(1-t)\varepsilon)\subset X$. Теорема доказана.

Следствие 1. Внутренность $X^0$ $K$-выпуклого множества $X$ также $K$-выпукла.

Следствие 2. На каждом луче, исходящем из произвольной внутренней точки $a$ $K$-выпуклого множества $X$ и состоящем из точек $x$ таких, что $\pm(a-x)\in K$, имеется самое большее одна граничная точка $X$.

Следствие 3. Пусть множество $X$ с непустой внутренностью $X^0$ является $K$-выпуклым. Пусть также для каждой точки $x$ из замыкания $\bar{X}$ множества $X$ имеется по крайней мере одна внутренняя точка $a$ из $X^0$ такая, что $\pm(a-x)\in K$. Тогда имеет место равенство $\bar{X}=\overline{X^0}$.

Докажем следствие 3. Включение $\overline{X^0}\subset\bar{X}$ очевидно в силу включения $X^0\subset X$. Пусть теперь $x$ – произвольная точка из $\bar{X}$. По условиям следствия для $x$ существует внутренняя точка $a\in X^0$ такая, что $\pm(a-x)\in K$. Тогда каждая точка отрезка $[a,x]$, возможно за исключением самой точки $x$, принадлежит $X^0$. Следовательно, в $X^0$ имеются точки, сколь угодно близкие к $x$. Отсюда имеем $\bar{X}\subset\overline{X^0}$, то есть $\bar{X}=\overline{X^0}$, что и требовалось доказать.

**3. Операции над *K*-выпуклыми множествами.** Операция пересечения $K$-выпуклых множеств, как видно из теоремы 2 первого пункта, ведет к образованию нового $K$-выпуклого множества. В этом параграфе исследуются другие способы построения новых $K$-выпуклых множеств.

Прежде всего в данном направлении сформулируем следующее усиление теоремы 2 п. 1.

**Теорема 1.** Пусть множества $X_i$ являются $K_i$-выпуклыми множествами, $i=1,2,\ldots,s$, и множество $K=\bigcap_{i=1}^{s}K_i$ не пусто. Тогда пересечение множеств $X_i$, $i=1,2,\ldots,s$ является $K$-выпуклым множеством.

Доказательство теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 2 из п. 1. С помощью непосредственной проверки $K$-выпуклости обосновываются и следующие две теоремы.

**Теорема 2.** Пусть множества $X_i$ являются $K_i$-выпуклыми множествами в пространствах $R^{n_i}$, $i=1,2,\ldots,s$. Тогда декартовое произведение этих множеств $\prod_{i=1}^{s}X_i$ является $K_i$-выпуклым множеством в пространстве $\prod_{i=1}^{s}R^{n_i}$, где $K=\bigcap_{i=1}^{s}K_i$.

**Теорема 3.** Пусть $A:R^n\to R^m$ – линейное отображение и $Y=AX,T=AK$ – образы множеств $X$, $K$ при отображении $A$ соответственно. Пусть также множество $X$ является $K$-выпуклым множеством, и для любых $y^1,y^2\in Y$, $\pm(y^2-y^1)\in T$ существуют $x^1,x^2\in X$ такие, что $y^i=Ax^i, i=1,2,$ и $\pm(x^2-x^1)\in K$. Тогда множество $Y$ является $T$-выпуклым множеством.

Докажем теорему 3 (доказательство теоремы 2 проводится аналогично). В силу линейности отображения $A$ множество $T$ является выпуклым множеством [1]. Возьмем произвольные $y^1,y^2\in Y$, $\pm(y^2-y^1)\in T$. Из условий теоремы 3 существуют $x^1,x^2\in X$ такие, что $y^i=Ax^i, i=1,2,$ и $\pm(x^2-x^1)\in K$. В силу $K$-выпуклости множества $X$ отрезок $[x^1,x^2]$ лежит в $X$, но тогда и отрезок $[y^1,y^2]$ лежит в $Y$. Значит, множество $Y$ является $T$-выпуклым множеством. Теорема 3 доказана.

Следствие. Пусть $A:R^n\to R^m$ – обратимое линейное отображение и $Y=AX,T=AK$ – образы множеств $X$, $K$ при отображении $A$ соответственно. Пусть также множество $X$ является $K$-выпуклым множеством. Тогда множество $Y$ является $T$-выпуклым множеством.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что обратимость отображения $A$ обеспечивает выполнение требований теоремы 3.

### Библиографические ссылки

1. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. – М. : Мир, 1972. – 519 с.

2. *Андрамонов М. Ю.* Методы глобальной минимизации для некоторых классов обобщенно выпуклых функций. – Казань : Изд-во Казанского математического общества, 2001. – 163 с.

3. *Солтан В. П.* Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. – Кишинев : Изд-во Штиинца, 1984. – 224 с.

4. *Fejer L.* Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen // J. London Math. Soc. – 1933. – № 8. – P. 53–62.

5. *Аксентьев Л. А.*, *Шабалин П. Л.* Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение // Известия вузов. Математика. – 1983 – № 2. – С. 6–14.

6. *Севодин М. А.* Равновесные и парето-оптимальные распределения в экономике обмена с невыпуклыми предпочтениями потребителей // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО. – 2011. – № 3. – С. 149–154.

7. *Севодин М. А.* Множества, выпуклые в конусе направлений // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 10. – С. 73–76.

*M. A. Sevodin*, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University

**Properties of Sets that Are Convex within a Certain Totality of Directions**

*The article deals with sets that are convex in the direction of some set K. It is stated that many well-known properties of ordinary convex sets may be modified for the case of K-convex sets. Application in the theory of optimization is given.*

**Key words:** K-convex sets, linear combinations, convex hull, directions.

УДК 517.98

**П. А. Косарев**, аспирант, Орловский государственный университет

# ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

*Вычисляются характеристики (порядок и тип) оператора дифференцирования, действующего в весовом пространстве целых функций уточненного порядка. Показано, что они совпадают с характеристиками этого же оператора в весовом пространстве целых функций с экспоненциальным весом.*

**Ключевые слова:** локально выпуклое пространство, векторнозначная функция, оператор дифференцирования, порядок и тип оператора.

Рассмотрим пространство $[\rho(r), \theta]$, $\theta' < \infty$ – пространство всех целых функций, для которых

$$\|F\|_\varepsilon = \sup_{r\ge 0}\left\{\max_{|z|\le r}|F(z)|e^{-(\theta+\varepsilon)r^{\rho(r)}}\right\} < +\infty,$$
$$\forall F \in [\rho(r),\theta],$$

где $\rho(r)$ – уточненный порядок, то есть выполняется:

1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho,$
2) $\lim\limits_{r\to\infty}(\rho'(r)\cdot\rho\cdot\ln\rho) = 0.$

Вычислим порядок оператора [1] дифференцирования в пространстве $[\rho(r),\theta], \theta`< \infty$ с заданной топологией.

Рассмотрим целую векторнозначную функцию

$$\varphi(t) = F(t+z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(z)}{n!}t^n : C \to [\rho,\sigma].$$

Пусть функция $F \in [\rho(r),\sigma]$ имеет порядок $0 \le \rho(r,F) \le \rho$ и тип $\sigma(F)$.

Заметим, что

$$\|\varphi(t)\|_\varepsilon = \sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}|F(t+z)|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\} \ge |F(t)|,$$
$$\forall\varepsilon > 0, \forall t,$$

поэтому рост функции $\varphi$ не может быть больше, чем рост функции $F$.

Имеем

$$\max_{|t|=r}\|\varphi(t)\|_\varepsilon = \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}|F(t+z)|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\}.$$

Из определения порядка и типа целой функции следует, что

$$\forall\delta > 0, \exists C_\delta : |F(z)| < C_\delta \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)|z|^{\rho(r,F)}\right\}, \forall p$$

$$\forall\delta > 0, \exists C_\delta :$$
$$|F(t+z)| < C_\delta \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)|t+z|^{\rho(t+z,F)}\right\}, \forall p$$

$$\forall\delta > 0, \exists C_\delta :$$
$$\max_{|z|\le p}|F(t+z)| < C_\delta \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+|t|)^{\rho(p+|t|,F)}\right\}, \forall p$$

Учитывая, что $|t| = r$, получаем

$$\max_{|t|=r}\|\phi(t)\|_\varepsilon = \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}|F(t+z)|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\} \le$$
$$\le \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{C_\delta \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+|t|)^{\rho(p+|t|,F)}\right\}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\} \le$$
$$\le C_\delta \sup_{p\ge 0}\left\{\exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+r)^{\rho(p+r,F)} -\right.\right.$$
$$\left.\left.-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}\right\}\right\} = C_\delta \sup_{p\ge 0}\psi(p),$$

где

$$\psi(p) = \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(p+r)^{\rho(p+r,F)} - (\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}\right\} =$$
$$= \exp\left\{(\sigma(F)+\delta)(r)^{\rho(p+r,F)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left(1+\frac{p}{r}\right)^{\rho(p+r,F)} - \left(\frac{\theta+\varepsilon}{\sigma(F)+\delta}\right)\left(\frac{p^{\rho(p)}}{r^{\rho(p+r,F)}}\right)\right)\right\}.$$



Получено 05.12.13