The article deals with sets that are convex in the direction of some set K. It is stated that many well-known properties of ordinary convex sets may be modified for the case of K-convex sets. Application in the theory of optimization is given.

Key words: K-convex sets, linear combinations, convex hull, directions.

УДК 517.98

П. А. Косарев, аспирант, Орловский государственный университет

ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ УТОЧНЕННОГО ПОРЯДКА

Вычисляются характеристики (порядок и тип) оператора дифференцирования, действующего в весовом пространстве целых функций уточненного порядка. Показано, что они совпадают с характеристиками этого же оператора в весовом пространстве целых функций с экспоненциальным весом.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, векторнозначная функция, оператор дифференцирования, порядок и тип оператора.

Рассмотрим пространство $[\rho(r),\ \theta]$, $\theta' < \infty$ – пространство всех целых функций, для которых

$$\|F\|_{\varepsilon} = \sup_{r\ge 0}\left\{\max_{|z|\le r}\left|F(z)\right|e^{-(\theta+\varepsilon)r^{\rho(r)}}\right\} < +\infty,$$
$$\forall F \in [\rho(r),\theta],$$

где $\rho(r)$ – уточненный порядок, то есть выполняется:

1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r) = \rho,$
2) $\lim\limits_{r\to\infty}\left(\rho'(r)\cdot\rho\cdot\ln\rho\right) = 0.$

Вычислим порядок оператора [1] дифференцирования в пространстве $[\rho(r),\theta], \theta` < \infty$ с заданной топологией.

Рассмотрим целую векторнозначную функцию

$$\varphi(t) = F(t+z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(z)}{n!}t^n : C \to [\rho,\sigma].$$

Пусть функция $F \in [\rho(r),\sigma]$ имеет порядок $0 \le \rho(r,F) \le \rho$ и тип $\sigma(F)$.

Заметим, что

$$\|\varphi(t)\|_{\varepsilon} = \sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}\left|F(t+z)\right|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\} \ge |F(t)|,$$
$$\forall\varepsilon > 0, \forall t,$$

поэтому рост функции φ не может быть больше, чем рост функции F.

Имеем

$$\max_{|t|=r}\|\varphi(t)\|_{\varepsilon} = \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}\left|F(t+z)\right|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\}.$$

Из определения порядка и типа целой функции следует, что

$$\forall\delta > 0, \exists C_{\delta} : |F(z)| < C_{\delta}\exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)|z|^{\rho(r,F)}\right\}, \forall p$$

$$\forall\delta > 0, \exists C_{\delta} :$$
$$|F(t+z)| < C_{\delta}\exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)|t+z|^{\rho(t+z,F)}\right\}, \forall p$$

$$\forall\delta > 0, \exists C_{\delta} :$$
$$\max_{|z|\le p}|F(t+z)| < C_{\delta}\exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+|t|\right)^{\rho(p+|t|,F)}\right\}, \forall p$$

Учитывая, что $|t| = r$, получаем

$$\max_{|t|=r}\|\phi(t)\|_{\varepsilon} = \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{\max_{|z|\le p}\left|F(t+z)\right|e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\} \le$$
$$\le \max_{|t|=r}\left\{\sup_{p\ge 0}\left\{C_{\delta}\exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+|t|\right)^{\rho(p+|t|,F)}\right\}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\ e^{-(\theta+\varepsilon)p^{\rho(p)}}\right\}\right\} \le$$
$$\le C_{\delta}\sup_{p\ge 0}\left\{\exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)(p+r)^{\rho(p+r,F)} -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\right\}\right\} = C_{\delta}\sup_{p\ge 0}\psi(p),$$

где

$$\psi(p) = \exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)(p+r)^{\rho(p+r,F)} - (\theta+\varepsilon)\,p^{\rho(p)}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\left(\sigma(F)+\delta\right)(r)^{\rho(p+r,F)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left(1+\frac{p}{r}\right)^{\rho(p+r,F)} - \left(\frac{\theta+\varepsilon}{\sigma(F)+\delta}\right)\left(\frac{p^{\rho(p)}}{r^{\rho(p+r,F)}}\right)\right)\right\}.$$

© Косарев П. А., 2014
Получено 05.12.13

Очевидно, что $\psi(0)=e^{(\sigma(F)+\delta)r^{\rho(p+r,F)}}$, $\psi(\infty)=0$.

Найдем точки $p\in(0,+\infty)$, где $\psi'(p)=0$.

$$\ln\psi(p)=\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}-\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)};$$

$$\left(\ln\psi(p)\right)'=\left(\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}-\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\right)';$$

$$\left(\ln\psi(p)\right)'=\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}\times$$
$$\times\left(\rho'\left(p+r,F\right)\ln(p+r)+\frac{\rho\left(p+r,F\right)}{p+r}\right)-$$
$$-\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\left(\rho'\left(p\right)\ln p+\frac{\rho\left(p\right)}{p}\right);$$

$$\left(\ln\psi(p)\right)'=\frac{\psi'(p)}{\psi(p)};$$

$$\psi'(p)=0\Rightarrow\left(\ln\psi(p)\right)'=0\Rightarrow$$

$$\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}\times$$
$$\times\left(\rho'\left(p+r,F\right)\ln(p+r)+\frac{\rho\left(p+r,F\right)}{p+r}\right)-$$
$$-\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\left(\rho'\left(p\right)\ln p+\frac{\rho\left(p\right)}{p}\right)=0;$$

$$\left(\sigma(F)+\delta\right)\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}\times$$
$$\times\left(\rho'\left(p+r,F\right)\ln(p+r)+\frac{\rho\left(p+r,F\right)}{p+r}\right)=$$
$$=\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\left(\rho'\left(p\right)\ln p+\frac{\rho\left(p\right)}{p}\right);$$

$$\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)}\rho'\left(p+r,F\right)\ln(p+r)+$$
$$+\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)-1}\rho\left(p+r,F\right)=$$

$$=\frac{\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)}\rho'\left(p\right)\ln p}{\sigma\left(F\right)+\delta}+\frac{\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)-1}\rho\left(p\right)}{\sigma\left(F\right)+\delta}.$$

В пределе при $p\to\infty$ с учетом определения уточненного порядка:

1) $\lim\limits_{p\to\infty}\rho\left(r\right)=\rho$,

2) $\lim\limits_{p\to\infty}\left(\rho'\left(r\right)\cdot\rho\cdot\ln\rho\right)=0$, имеем

$$\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)-1}\rho\left(p+r,F\right)=\frac{\left(\theta+\varepsilon\right)p^{\rho(p)-1}\rho\left(p\right)}{\sigma\left(F\right)+\delta};$$

$$\frac{\left(p+r\right)^{\rho(p+r,F)-1}}{p^{\rho(p)-1}}=\frac{\left(\theta+\varepsilon\right)\rho\left(p\right)}{\rho\left(p+r,F\right)\left(\sigma\left(F\right)+\delta\right)}.$$

Таким образом, задача отыскания характеристик оператора дифференцирования в весовом пространстве целых функций уточненного порядка свелась к задаче отыскания характеристик данного оператора в пространстве $\left[\rho,\sigma\right]$, найденных С. Н. Мишиным в [2].

Характеристики оператора дифференцирования в пространстве $\left[\rho\left(r\right),\theta\right]$ имеют вид

$$\beta_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right)=\beta\left(\frac{d}{dz}\right)=\frac{\rho-1}{\rho};$$

$$\alpha_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right)=\alpha\left(\frac{d}{dz}\right)=e^{-1}\left(\sigma e\rho\right)^{\frac{1}{\rho}},\ \rho\le 1;$$

$$\alpha_{\varepsilon}\left(\frac{d}{dz}\right)=e^{-1}\left(\sigma e\rho\Omega_{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}},\ \alpha\left(\frac{d}{dz}\right)=e^{-1}\left(\sigma e\rho\Omega\right)^{\frac{1}{\rho}},\ \rho>1.$$

Библиографические ссылки

1 *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М., 1983.

2. *Громов В. П., Мишин С. Н., Панюшкин С. В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения : монография. – Орел : ОГУ, 2009. – 430 с.

P. A. Kosarev, Post-graduate, Oryol State University

Characteristics of the Differential Operator in Weight Space of Entire Functions of Proximate Order

In this paper we find characteristics (order and type) of differential operator, operating in a weight space of entire functions of proximate order. It is shown that they answer the characteristics of the same operator in a weight space of entire functions with an exponential weight.

Key words: locally convex space (LCS), vector valued function, operator of differentiation, order and type of the operator.