

УДК 532.54

Е. А. Косолапов, кандидат физико-математических наук, доцент, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

М. Д. Соленников, аспирант, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

## МЕТОД РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ТУРБИННЫХ РЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

*В основе предлагаемого метода лежат интегральные уравнения законов сохранения. Особенности метода: расщепление по физическим процессам, криволинейная неортогональная разностная сетка и процесс установления. Приведены результаты тестовых расчетов.*

**Ключевые слова:** течение газа, турбинная решетка, интегральные уравнения.

В современных турбомашинах часть лопаточных аппаратов работает при трансзвуковых и сверхзвуковых скоростях течения газа. При этом структура потока имеет сложный вид за счет образования скачков уплотнения, их взаимодействия, а также за счет отрывных явлений [1, 2]. Для оптимизации межлопаточных каналов, с целью уменьшения потерь энергии и обеспечения проектных параметров решеток, необходимым становится численное моделирование таких течений. Практически важным является, в частности, расчет течений невязкого и нетеплопроводного газа.

Для расчетов течения газа исходными являются математические модели. Уравнения этих моделей, представляющие собой законы сохранения, могут быть записаны как в интегральной, так и в дифференциальной формах. Представляется, что интегральная форма является более предпочтительной для численной реализации. Прежде всего она позволяет описывать разрывные течения, что невозможно исходя из дифференциальных уравнений. Применение дифференциальных математических моделей к разрывным течениям становится возможным при численном решении. Это связано с возникновением схемной вязкости при разностной аппроксимации [3, 4], что приводит к сглаживанию разрывов и возможности придать смысл производным на них.

### Постановка задачи

Исходная система уравнений законов сохранения газовой динамики в интегральной форме имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int AdV = \oint (\bar{w}d\bar{S})A + \oint d\bar{S}B, \quad (1)$$

где  $A = \{\rho; \rho\bar{w}; \rho E\}$ ;  $B = \{0; p; \rho\bar{w}\}$ ;  $t$  – время;  $\bar{w}$  – вектор скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $E$  – удельная полная энергия.

Для «замыкания» этой системы уравнений необходимо использовать уравнения состояния газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left( E - \frac{|\bar{w}|^2}{2} \right), \quad (2)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Расчетная область и криволинейная неортогональная разностная сетка, использованная в расчетах, представлена на рис. 1.

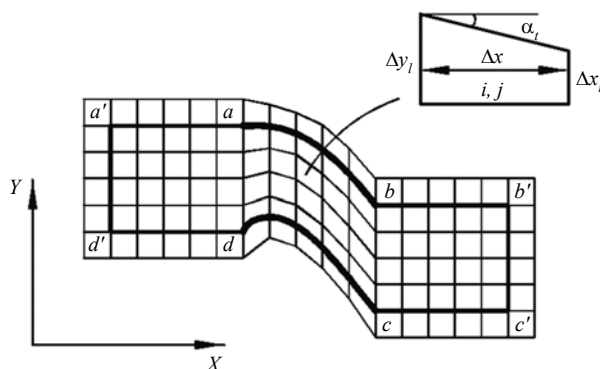


Рис. 1. Неортогональная разностная сетка

Отметим, что в современных пакетах, например Flow Vision, используется ортогональная прямоугольная сетка либо с измельчением ее у криволинейных границ, либо с введением дробных ячеек [3, 5]. Это может привести к искажению результатов, так как схемная вязкость разностных схем зависит от размеров ячеек [3, 4]. В этих случаях схемная вязкость будет существенно различна в разных областях течения. Возможно введение криволинейной ортогональной сетки [6], схемная вязкость при этом однородна для несильно искривленных областей.

Для задания граничных условий за всеми границами вводится дополнительный слой фиктивных ячеек. Как видно из рис. 1, все ячейки имеют в общем случае форму трапеции. Рассчитываемые в каждой ячейке параметры относятся к центру средней линии трапеции.

На твердых границах (на поверхности лопаток) ставят условия непротекания, заключающиеся в равенстве нулю нормальной к границе составляющей скорости. Все остальные параметры на этой границе «сносятся» в фиктивный слой без изменений.

На входной границе  $a-a'$ , расположенной на расстоянии шага решетки от входной границы канала (рис. 1) задавались параметры торможения и угол наклона вектора скорости к оси  $X$ .

На выходе (на границе  $d-d'$ , см. рис. 1): для сверхзвукового истечения выполнялась экстраполяция всех параметров из расчетного поля в соответствующий фиктивный слой, для дозвукового истечения задавалось противодавление.

На границах  $a-b$ ,  $a'-b'$ ,  $c-d$ ,  $c'-d'$  ставились периодические граничные условия, моделирующие бесконечную решетку. Эти условия сводятся к переносу в фиктивный слой значений параметров из симметричного расчетного слоя.

Система уравнений (1) решалась по явным разностным схемам с расщеплением по физическим процессам [3, 4, 6]. Так как стационарное решение системы уравнений (1) находится в процессе установления, важное значение для времени расчета имеет выбор начальных условий. В данной работе начальное распределение параметров определялось в квазиодномерном приближении по газодинамическим функциям после «спрямления» межлопаточного канала [7].

### Разностная аппроксимация

Для построения разностной схемы метода необходимо предварительно рассмотреть разностную аппроксимацию интегральных членов, входящих в систему уравнений (1), записанную для каждой ячейки. Здесь используются обычные подходы с учетом криволинейности разностной сетки. Так, для производной по времени применяется аппроксимация первого порядка точности. Объемный интеграл от произвольного параметра  $\varphi$  может быть подсчитан с учетом линейной аппроксимации границ ячейки:

$$\left( \int dV \varphi \right)_{i,j} \approx \varphi_{i,j} \frac{\Delta y_l + \Delta y_r}{2} \Delta x, \quad (3)$$

где  $x, y$  – пространственные координаты;  $\Delta x, \Delta y$  – шаги разностной сетки.

В формуле (3), как и в последующих, опущено умножение на высоту канала, так как эта величина впоследствии сократится.

Для поверхностных интегралов  $\oint d\bar{S}B$  используется симметричная аппроксимация без учета направления потока (индексы  $r, l, b, t$  относятся к правой, левой, нижней и верхней границам ячейки соответственно, см. рис. 1):

$$\left( \text{Pr}_x \int d\bar{S}\varphi \right)_{i,j} \approx \Delta y_r \varphi_r - \Delta y_l \varphi_l - \Delta x \varphi_t \text{tg } \alpha_t + \Delta x \varphi_b \text{tg } \alpha_b, \quad (4)$$

$$\left( \text{Pr}_x \int d\bar{S}\varphi \right)_{i,j} \approx \Delta x (\varphi_l - \varphi_b). \quad (5)$$

При этом значение скалярного параметра  $\varphi$  на границах ячеек находится как полусумма значений в соответствующих соседних ячейках. Подобный интеграл, входящий в уравнение энергии, сводится к интегралам вида (4) и (5):

$$\oint d\bar{S}\bar{w}p = \text{Pr}_x \int d\bar{S}u p + \text{Pr}_y \int d\bar{S}v p. \quad (6)$$

Для конвективных поверхностных интегралов  $\oint (d\bar{S}\bar{w})A$  аппроксимация строится с учетом направления потока на границах ячейки. Для этого сначала определяются проекции скорости на направление внешней нормали к границе:

$$\begin{cases} w_l = -\frac{u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2} = -u_l, \\ w_r = -\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} = u_r, \\ w_t = v_t \cos \alpha_t - u_t \sin \alpha_t, \\ w_b = u_b \sin \alpha_b - v_b \cos \alpha_b, \end{cases} \quad (7)$$

где  $u, v$  – составляющие скорости по осям  $X, Y$  соответственно.

Таким образом, с учетом обозначений на рис. 1 «конвективный» интеграл может быть вычислен по формуле

$$\oint (d\bar{S}\bar{w})\varphi \approx \Delta y_l w_l \varphi_l + \Delta y_r w_r \varphi_r + \Delta y_b w_b \varphi_b + \Delta y_t w_t \varphi_t, \quad (8)$$

при этом параметры на границах находятся не в виде соответствующей полусумма, а с учетом направления потока. Например, на левой границе

$$\varphi_l = \begin{cases} \varphi_{i-1,j}, & \text{если } w_l < 0, \\ \varphi_{i,j}, & \text{если } w_l > 0. \end{cases} \quad (9)$$

### Эйлеров этап

Расчет изменения параметров за один шаг по времени осуществляется в два этапа. На первом – эйлеровом – учитываются изменения параметров за счет давления. Система уравнений этого этапа получается из системы (1) отбрасыванием конвективных членов и имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int dVA = \oint d\bar{S}B. \quad (10)$$

Используя рассмотренную разностную аппроксимацию интегралов для этого случая (4)–(6), получим значения параметров после этого этапа (помечены значком «~»):

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\left( \int dV \right)_{i,j}} \left( \oint d\bar{S}B \right)_{i,j}. \quad (11)$$

При этом видно, что плотность газа на этом этапе не изменяется. Приведенные разностные формулы имеют первый порядок аппроксимации по времени и второй по пространственным переменным.

### Лагранжев этап

Изменения параметров за счет перетекания рассчитываются на лагранжевом этапе, так как влияние давления уже учтено. Из системы уравнений (1) получим систему уравнений данного этапа:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int dVA = \oint (d\bar{S}\bar{w})A. \quad (12)$$

Отсюда значения параметров в ячейке с номером  $i, j$  могут быть найдены по формулам

$$A_{i,j}^{n+1} = \tilde{A}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\left(\int dV\right)_{i,j}} \left[ \oint (d\vec{S}\vec{w}) \tilde{A} \right]_{i,j}^n. \quad (13)$$

В (13) разностная аппроксимация поверхностных интегралов осуществляется с учетом направления потока (7)–(9). Разностная схема этого этапа имеет первый порядок точности по пространственным и временной переменным. В правой части формулы (13) в качестве исходных берутся значения параметров после эйлера этапа.

Таким образом, формулами (13) заканчивается расчет одного шага по времени.

Отметим, что значения параметров в фиктивных ячейках необходимо рассчитывать после каждого этапа в соответствии с граничными условиями.

### Тестовые расчеты

В качестве тестовой задачи был выбран расчет трансзвукового течения газа в плоской решетке профилей, рассмотренный в работе А. Р. Шустера [1]. Алгоритм использованный в этой статье основан на методе распада-разрыва Годунова. Для ускорения сходимости в этой работе применен переменный шаг по времени для разных ячеек разностной сетки. Такой подход возможен, если размеры ячеек существенно отличаются друг от друга. В частности, в статье [1] используется почти ортогональная сетка, что приводит к появлению дробных ячеек. В предлагаемом алгоритме эта проблема не возникает.

На рис. 2 приведены результаты расчета изолиний чисел Маха методом работы [1] и предложенным в данной работе. На этом рисунке приведены фронты скачков уплотнения, полученные в работе [1] по наибольшим градиентам параметров. Полученные в собственных расчетах конфигурации скачков уплотнения примерно совпадают с приведенными. За счет более мелкой разностной сетки в наших расчетах наблюдалась и отраженная от нижнего профиля ударная волна.

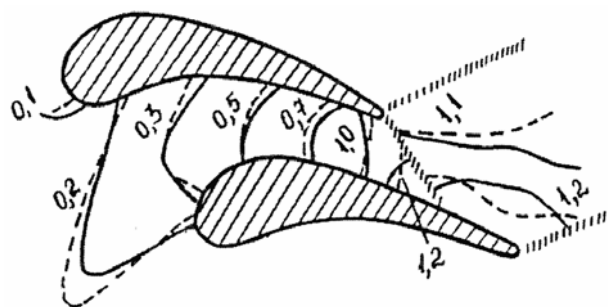


Рис. 2. Изолинии чисел Маха в турбинной решетке:  
— — — — — расчет; — — — — — расчет [1]

Таким образом, результаты выполненных тестовых расчетов позволяют рекомендовать разработанные разностные схемы для расчетов течений газа в плоских решетках профилей.

### Библиографические ссылки

1. Шустер А. Р. Расчет трансзвуковых и сверхзвуковых газовых потоков в плоских решетках турбомашин // Теплоэнергетика. – 1976. – № 3. – С. 41–43.
2. Кузнецов Ю. П. Создание неавтономных турбоприводов на базе синтеза высокоэффективных микротурбин различных кинематических схем : дис. ... д-ра техн. наук. – Нижний Новгород : НГТУ, 1994. – 467 с.
3. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газодинамике. – М. : Наука, 1982. – 392 с.
4. Давыдов Ю. М., Косолапов Е. А. Численное моделирование двухфазных течений в соплах методом крупных частиц. – М. : Нац. академия прикладных наук, 1998. – 86 с.
5. Алымов А. Г., Дормидонтов Д. В. Применение программного комплекса “FLOW VISION” для моделирования трехмерного течения жидкости при проектировании проточных частей насосов. – Нижний Новгород : ФГУП «ОКБМ им. И. И. Африкантов», 2012.
6. Алиев А. В., Андреев В. В. Разработка параллельных алгоритмов расчета задач газовой динамики методом крупных частиц // Интеллектуальные системы в производстве. – 2006. – № 1. – С. 4–17.
7. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. – М. : Наука, 1969. – 824 с.

*E. A. Kosolapov*, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R. E. Alekseev

*M. D. Solennikov*, Post-graduate, Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R. E. Alekseev

### Method of Calculation of Gas Flow in Turbine Lattices on the Basis of Integrated Equations

*Integrated equations of conservation laws are at the heart of the proposed method. The features of this method are: splitting on physical processes, curvilinear non-orthogonal differential grid and establishment process. Results of test calculations are given.*

**Key words:** gas flow, turbine lattice, integrated equations.