УДК 517.98

С. Н. Манько, Орловский государственный институт искусств и культуры

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Рассмотрены условия существования интегрального представления обобщенных операторных экспонент. Установлена область аналитичности векторнозначной функции, порожденной оператором конечного порядка.

Ключевые слова: порядок и тип оператора, регулярный оператор, резольвента, локально выпуклое пространство.

Прежде всего введем некоторые важные обозначения. Следуя [1], под $\alpha_p(x)$ и $\beta_p(x)$ будем, соответственно, понимать операторный p-порядок и операторный p-тип вектора x относительно оператора A; под $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – соответственно, операторный порядок и операторный тип вектора x относительно оператора A.

Пусть H – секвенциально полное (если в пространстве H каждая счетная фундаментальная последовательность сходится, то H называется счетно полным или секвенциально полным) отделимое локально выпуклое пространство, топология на котором задана мультинормой $\{\|\cdot\|\}$, $p \in \mathrm{P}$ (P – частично упорядоченное множество индексов), и пусть $A : H \to H$ – линейный непрерывный оператор.

Оператор A называется регулярным, если найдется $M > 0$ такое, что

$$\forall p \in \mathrm{P}, \exists C_p, \exists q(p), \forall n, \forall x \in H, \left\|A^n(x)\right\|_p \le C_p M^n \|x\|_q .$$

В терминах порядка и типа оператора [1, 2] регулярность означает, что порядок оператора A, $\beta(A) > 0$ или $\beta(A) = 0$, но тогда тип $\alpha(A) < \infty$.

Понятие регулярного оператора введено Радыно Я. В. [3] и применялось к исследованию линейных дифференциальных уравнений в локально выпуклых пространствах. Для регулярного оператора справедливы аналоги многих результатов спектральной теории операторов в банаховых пространствах.

Регулярные операторы образуют весьма широкий класс линейных непрерывных операторов. Такими операторами, например, являются: оператор интегрирования $A_1(F) = \int_0^z F(t)dt : H(\mathrm{C}) \to H(\mathrm{C})$, оператор умножения $A_2(F) = zF : H_R \to H_R$, оператор дифференцирования $A_3(F) = \dfrac{d}{dz} : [\rho, \sigma] \to [\rho, \sigma]$, $\rho \le 1, \sigma < \infty$, многие интегральные операторы и т. д. Регулярными являются все линейные операторы, действующие в нормированном пространстве.

Число $\lambda \in \mathrm{C}$ называется регулярным значением оператора A, если оператор $A - \lambda I$ имеет обратный, который определен на всем H, непрерывен и является регулярным. Оператор $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ принято называть резольвентой, а множество $\rho(A)$ всех регулярных точек – резольвентным множеством. Множество $\sigma(A) = \mathrm{C} \setminus \rho(A)$ называется спектром оператора A [4].

Как известно [5, 6], спектр линейного непрерывного оператора, действующего в банаховом пространстве, замкнут, а резольвентное множество открыто. Это свойство распространяется на все линейные непрерывные операторы, действующие в произвольных секвенциально полных локально выпуклых пространствах. Однако спектр линейного непрерывного оператора (если этот оператор не является регулярным) может оказаться пустым или заполнять всю комплексную плоскость, чего в банаховых пространствах, как известно, быть не может.

Если $A : H \to H$ – регулярный оператор, то его спектр ограничен, и для такого оператора вводится понятие спектрального радиуса [3].

$$r(A) = \inf\left\{M > 0 : \left\|A^n\right\|_p \le M^n \|x\|_q ,\ \forall x \in H, \forall p, q = q(p)\right\}. \tag{1}$$

Из (1) следует:

$$r(A) = \begin{cases} 0, \beta(A) < 0, \\ \alpha(A), \beta(A) = 0. \end{cases}$$

Резольвента регулярного оператора представляется в виде

$$R(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}},\ |\lambda| > r(A),$$

при этом на окружности $|\lambda| > r(A)$ имеется хотя бы одна точка спектра.

Пусть $\varphi(\lambda; t) : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ при $t = t_0$ аналитична в области $D_{t_0}(\phi(\lambda; t))$ по переменной λ. Пусть $A : H \to H$ – регулярный оператор, $R(\lambda)$ – его резольвента, $\sigma(A)$ – его спектр. Векторнозначной функцией, порожденной скалярной функцией $\varphi(t)$ и оператором A, назовем функцию $\varphi(A; t)(x) : \mathrm{C} \to H$, определяемую равенством

Получено 22.12.13

$$\varphi(A;t)(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\lambda)(x)\varphi(\lambda;t)d\lambda, \ \forall x \in H, \qquad (2)$$

где интеграл от векторнозначной функции понимается в слабом смысле [7], Г – спрямляемый контур, заключающий спектр оператора A и входящий в $D_t(\varphi(\lambda;t))$.

Теорема. Векторнозначная функция $\varphi(A;t)(x)$, $x \in H$ определена и аналитична в области

$$D(\varphi(A;t))(x) = \{t \in C;\ \sigma(A) \subset D_t(\varphi(\lambda;t))\}.$$

Доказательство

Функция $\varphi(A;t)(x)$ определяется с помощью интеграла (2). Этот интеграл существует, когда существует контур Г. Это выполняется при условии $\sigma(A) \subset D_t(\varphi(\lambda;t))$, так как $\sigma(A)$ замкнут, а $D_t(\varphi(\lambda;t))$ открыто.

Покажем, что выражение (2) является аналитической функцией переменной *t*. Зафиксируем произвольный функционал $l \in H^*$ (пространство, сильно сопряженное к пространству *H*). По определению слабого интеграла от векторнозначной функции,

$$l(\varphi(A;t)(x)) = -\int_{\Gamma} l(R(\lambda)(x)\varphi(\lambda;t))d\lambda.$$

Выражение в правой части имеет производную по *t*, значит, функция $\varphi(A;t)(x)$ является слабоаналитической в области $D(\varphi(A;t))(x)$. В [7] показано, что в локально выпуклых пространствах понятия сильной и слабой аналитичности векторнозначной функции совпадают, значит, $\varphi(A;t)(x)$ является сильноаналитической функцией в $D(\varphi(A;t))(x)$. □

Библиографические ссылки

1. *Громов В. П.*, *Мишин С. Н.*, *Панюшкин С. В.* Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения : монография. – Орел : ОГУ, 2009. – 430 с.

2. *Громов В. П.* Порядок и тип линейного оператора и разложения в ряд по собственным функциям // ДАН СССР. – 1986. – Т. 228. – № 1. – С. 27–31.

3. *Радыно Я. В.* Линейные дифференциальные уравнения в локально выпуклых пространствах I : Регулярные операторы и их свойства // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 8. – С. 1402–1410.

4. *Мишин С. Н.* Спектр и резольвента линейного непрерывного оператора, действующего в локально выпуклом пространстве // Ученые записки ОГУ. – 2003. – Вып. 4. – С. 25–34.

5. *Князев П. Н.* Функциональный анализ. – Минск : Вышэйш. шк., 1985.

6. *Садовничий В. А.* Теория операторов. – М. : Наука, 1999.

7. *Ле Хай Хой.* Векторнозначные функции и дифференциальные операторы бесконечного порядка : Ростов н/Д : Изд-во РГУ, 1981. – 54 с.

S. N. Manko, Oryol State Institute of Arts and Culture

Integrated Representation of Vector-Valued Functions Generated by the Operator of Final Order

Terms of existence of integrated representation of generalized operator exhibitors are considered in the article. The area of analyticity of the vector-valued function generated by the final order operator is established. The method of solving the linear operator equations within locally convex spaces is developed.

Key words: order and type of the operator, regular operator, resolvent, locally convex space.