

УДК 539.37/519.67

А. В. Алиев, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

А. Е. Калинин, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕТРИВИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлена процедура и результаты численного решения плоских задач линейной теории упругости сложной геометрии методом граничных элементов. Показано применение указанного метода на примере решения задачи о концентрации напряжений в заряде ракеты на твердом топливе.

Ключевые слова: теория упругости, плоская задача, метод граничных элементов, концентрация напряжений, заряд ракеты на твердом топливе.

Метод граничных элементов является одним из методов численного решения задач механики сплошных сред. Известно [1], что аналитическое решение краевых задач получается наиболее просто в тех случаях, когда:

– рассматриваемая область R является однородной, то есть свойства материала в R не изменяются от точки к точке;

– геометрия границы Γ области R является сравнительно простой;

– граничные условия на границе Γ сравнительно просты;

– решаемые в области R дифференциальные уравнения в частных производных являются линейными. Последнее условие позволяет путем суммирования некоторых решений указанных дифференциальных уравнений получить новые решения в области R .

Во многих разделах математической физики [2] имеются аналитические решения задач, в которых заданы точечные возмущения в бесконечной однородной области, например, сосредоточенная сила в упругом теле или тепловой источник в задачах теплопередачи. Такие решения разных по физическому содержанию задач называются *сингулярными* решениями, так как они дают хорошие результаты во всех точках области R за исключением той точки, где действует возмущение (сила, источник): это исключение проявляется в том, что в такой точке имеет место математическая аномалия – *сингулярность* (искомая величина стремится к бесконечности). При наличии в решаемой линейной задаче нескольких точек возмущения искомое решение можно получить путем суммирования решений, в которых действует только одно возмущение.

Рассмотрим (для простоты) двумерную плоскую область R с границей Γ . В методе граничных элементов только граница Γ рассматриваемой области R разделяется на некоторое количество элементов (сегментов). Численное решение задачи ищется с помощью предварительно полученных аналитических решений для простых сингулярных задач таким

образом, чтобы оно удовлетворяло приближенно заданным граничным условиям на каждом элементе контура Γ . Поскольку каждое сингулярное решение удовлетворяет в области R дифференциальным уравнениям задачи, то уже нет необходимости делить область R на отдельные элементы. В результате система алгебраических уравнений, подлежащая решению, оказывается значительно короче по сравнению с аналогичной системой, получаемой в методе конечных элементов при решении одной и той же краевой задачи.

В методе конечных элементов нужно всю область R разбить на некоторое количество малых элементов. Решение ищется только в узлах сетки элементов, а соответствующие неизвестные в точках области, не совпадающих с узлами, выражаются приближенно через известные узловые значения.

Часто метод граничных элементов по своим возможностям превосходит метод конечных элементов благодаря двум его решающим преимуществам:

– сокращение на единицу геометрической размерности задачи, что приводит к соответствующему снижению затрат на подготовку исходной информации, память, время и стоимость вычислений;

– возможность исследования бесконечных областей.

Основы метода граничных элементов с фиктивными нагрузками

Ниже на примере частной задачи о полости в бесконечном теле кратко рассматриваются математические основы метода граничных элементов. Позже будет показано, что этот метод применим также для краевых задач о конечных телах.

Рассмотрим плоскую краевую задачу в напряжениях для полости в бесконечном упругом теле (рис. 1). Полость является достаточно длинной в направлении оси z , поэтому можно рассматривать слой единичной толщины, т. е. решаем задачу о плоской деформации. Границу отверстия на рис. 1 обозначим как Γ . Локальные координаты n и s на границе направлены вдоль нормали и касательной к кривой Γ . При этом нормаль n является внешней к телу, а на-

правление касательной s должно совпадать с направлением обхода границы (на рис. 1 – против хода часовой стрелки).

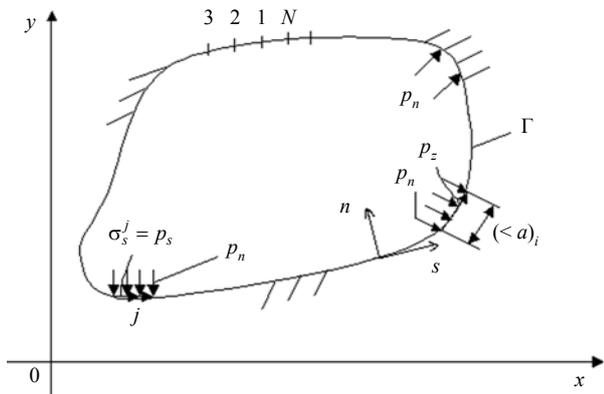


Рис. 1. Бесконечное тело с полостью

Пусть на границе полости действуют постоянные нагрузки в виде давлений p_n и p_s . Требуется определить перемещения и напряжения в любой точке рассматриваемого тела.

Для численного решения поставленной задачи применим следующую процедуру: заменим кривую Γ на ломаную линию из N прямых отрезков. Длину некоторого i -го граничного элемента обозначим $2a^i$. Если a мало, то аппроксимация границы Γ ломаной линией из N прямых отрезков будет достаточно точной. С учетом сказанного силовые граничные условия имеют следующий вид:

$$\sigma_n^i = -p_n^i, \sigma_s^i = p_s^i, i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

Поставленную задачу можно решить численно с помощью расчетной модели, представленной на рис. 2, где линия Γ' точно совпадает с линией Γ на рис. 1. Однако линия Γ' не является границей, она только обозначает положение N отрезков в бесконечном теле без полости, при этом на каждом отрезке i вдоль линии Γ' действуют некоторые нормальные p_n^i и касательные p_s^i давления. На рис. 2 для простоты показаны только давления p_n^j и p_s^j на отрезке j .

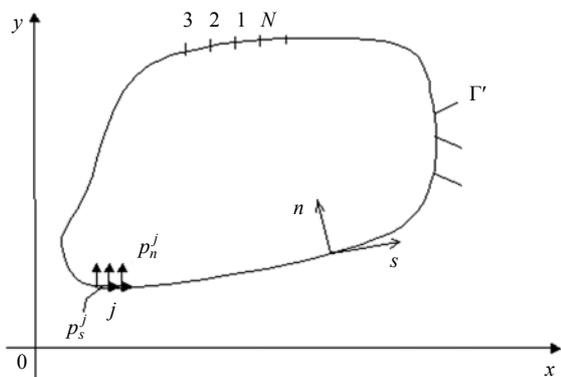


Рис. 2. Расчетная модель для решения задачи методом граничных элементов с фиктивными нагрузками

Действительные напряжения на отрезке j кривой Γ' не равны p_n^j и p_s^j (при условии, что и на других элементах тоже действуют нагрузки p_n^j и p_s^j). Поэтому для каждого элемента кривой Γ' будем различать две различные группы напряжений. Например, для элемента j имеем приложенные давления p_n^j и p_s^j и действительные напряжения σ_n^j и σ_s^j , которые созданы действием приложенных давлений p_n^j и p_s^j на всех N элементах кривой Γ' .

Действительные напряжения σ_n^i и σ_s^i в средней точке каждого отрезка кривой Γ' определяются следующими выражениями [3]:

$$\begin{aligned} \sigma_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j; \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j, \end{aligned} \tag{2}$$

где $i = 1, 2, \dots, N$, A_{ss}^{ij} , A_{sn}^{ij} , A_{ns}^{ij} , A_{nn}^{ij} – граничные коэффициенты влияния напряжений для рассматриваемой задачи. Например, коэффициент A_{sn}^{ij} равен действительному касательному напряжению σ_s^i в центре отрезка i , созданному единичной нормальной нагрузкой P_n^j , приложенной к отрезку j (то есть $P_n^j = 1$).

Теперь подберем такие значения приложенных давлений P_n^j и P_s^j для $j = 1, 2, \dots, N$, чтобы действительные напряжения σ_n^i и σ_s^i в уравнениях (2) были равны значениям, заданным граничными условиями (1). В этом случае получаем приближенное решение задачи, показанной рис. 1. С учетом граничных условий (1) получаем из уравнений (2) следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} p_s^i &= \sum_{j=1}^N A_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} P_n^j; \\ -p_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j, \end{aligned} \tag{3}$$

где $i = 1, \dots, N$.

Система уравнений (3) представляет собой $2N$ линейных алгебраических уравнений для $2N$ неизвестных P_n^j и P_s^j .

Отметим, что давления P_n^j и P_s^j в приведенных выше уравнениях являются фиктивными величинами, поскольку они были введены для численного решения поставленной задачи и в этой задаче они не означают реальные (физические) напряжения. С другой стороны линейные комбинации фиктивных нагрузок, получаемые в результате выполнения выражений (2), в рассматриваемой задаче уже имеют кон-

кретный физический смысл. На этом и основано построение системы алгебраических уравнений (3).

Решив систему (3), можно будет в дальнейшем определить смещения и напряжения в произвольной точке тела через другие линейные комбинации фиктивных нагрузок P_n^j и P_s^j , $j=1, \dots, N$. Описанный выше метод граничных элементов называется методом фиктивных нагрузок.

Внутренняя и внешняя задачи

Известно [1], что конкретную краевую задачу теории упругости можно решить в напряжениях, перемещениях или смешанным способом. В каждом из этих случаев получается своя система алгебраических уравнений метода граничных элементов, подлежащая решению. Например, если на граничном элементе i известны напряжения $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$ и $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$, то имеем систему уравнений (3) для определения фиктивных нагрузок P_n^j и P_s^j .

В случае геометрических граничных условий на граничном элементе известны перемещения $U_s^i = (U_s^i)_0$ и $U_n^i = (U_n^i)_0$. Тогда вместо системы (3) получаем:

$$\begin{aligned} (U_s^i)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} P_n^j, \\ (U_n^i)_0 &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} P_n^j. \end{aligned} \tag{4}$$

В случае смешанных граничных условий, когда на граничном элементе i известны перемещения U_n^i и напряжения σ_s^i , из уравнений (3) и (4) выделяют соответствующие для этого элемента уравнения. Поступая таким же образом для всех $i=1, 2, \dots, N$, получаем в этом случае следующую систему $2N$ алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными компонентами фиктивных нагрузок:

$$\begin{aligned} b_s^i &= \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} P_n^j, \\ b_n^i &= \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} P_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} P_n^j, \quad i=1, \dots, N. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь левые части означают известные значения усилий или смещений на границе (в зависимости от того, что конкретно задано), а C – соответствующие коэффициенты влияния из (3) и (4).

Пример. Определение напряженно-деформированного состояния и коэффициента концентрации напряжений в цилиндрическом скрепленном с жестким корпусом заряде ракеты на твердом топливе (рис. 3).

Исходные данные: наружный диаметр $D = 0,5$ м, внутренний диаметр $d = 0,1$ м, толщина горящего свода $W = 0,05$ м. Давление продуктов сгорания $P = 6$ МПа. Константы упругости материала заряда:

модуль Юнга $E = 60$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

На рис. 4 представлена с учетом симметрии геометрии и нагрузок расчетная модель заданного заряда в виде правой половины его поперечного сечения с указанием номеров граничных элементов.

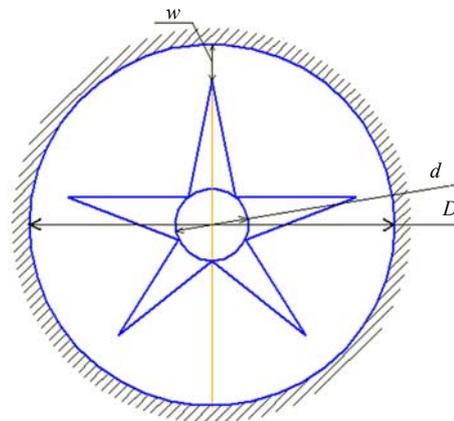


Рис. 3. Поперечное сечение цилиндра с внутренним каналом сложной геометрии

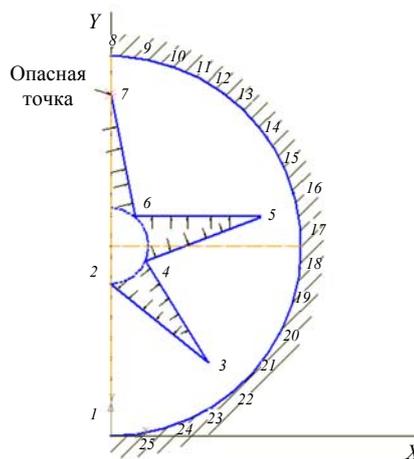


Рис. 4. Расчетная модель цилиндра

Численное решение этой задачи выполняем с помощью созданного нами графического интерфейса программы TWOFS (TWO dimensional Fictitious Stress) [3], построенной на основе вышерассмотренного метода граничных элементов.

Ниже в таблице 1 приведены результаты решения рассматриваемой задачи.

Положение опасной точки в заряде определяем с помощью первой гипотезы прочности, т. е. по величине максимального напряжения σ_{max} . Максимальное нормальное напряжение $\sigma_{max} = 2,762$ МПа возникает в середине граничного элемента 17. По таблице 2 параметров граничных элементов (смотри ниже) определяем координаты опасной точки: $X = 0$ м, $Y = 0,45$ м.

Кольцевые напряжения в эквивалентном заряде на его гладкой внутренней поверхности в случае абсолютного жесткого корпуса определяются из следующего выражения [4]:

$$\sigma_{\varphi}(a) = p \frac{\alpha^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} - 1}{\alpha^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} + 1},$$

где $\alpha = b/a$; b – наружный радиус заряда; $b = D/2 = 0,25$ м; a – расстояние от центра до вершины луча: $a = D/2 - W = 0,2$ м, т. е. имеем

$\alpha = b/a = 1,25$. Тогда $\sigma_{\varphi}(a) = 1,79$ МПа. Определяем величину коэффициента концентрации напряжений в рассматриваемом заряде по первой гипотезе прочности:

$$k = \frac{\sigma_{\max}^{\text{действ}}}{\sigma_{\max}^{\text{ном}}} = \frac{2,762}{1,79} = 1,54.$$

Таблица 1. Результаты решения задачи

***** РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ *****													
центры граничных элементов													
Эл-т	UX	UY	SIGXX	SIGYY	SIGXY	SIGMAX	SIGMIN	ALFA	SIG-S	SIG-N	SIG-T		
1	-1.2817E-18	-2.2573E-03	-2.6860E+06	-4.1132E+06	2.9604E-10	-2.3904E+06	-4.4088E+06	-1.1884E-14	-2.9604E-10	-2.6860E+06	-4.1132E+06	0.0000E+00	1.0000E+00
2	-1.0784E-18	-5.6548E-03	-3.4793E+06	-5.5781E+06	4.3212E-10	-3.0446E+06	-6.0128E+06	-1.1797E-14	-4.3212E-10	-3.4793E+06	-5.5781E+06	0.0000E+00	1.0000E+00
3	-2.5389E-18	-8.4556E-03	-6.0814E+06	-4.8693E+06	3.6441E-10	-4.6183E+06	-6.3324E+06	-1.7226E-14	-3.6441E-10	-6.0814E+06	-4.8693E+06	0.0000E+00	1.0000E+00
4	-9.3631E-18	-9.2451E-03	-5.6325E+06	-2.0652E+06	-1.8195E-09	-1.3264E+06	-6.3713E+06	-2.9224E-14	1.8195E-09	-5.6325E+06	-2.0652E+06	0.0000E+00	1.0000E+00
5	7.4785E-05	-1.0942E-02	-6.8030E+06	-6.5171E+06	6.4443E+05	-5.9847E+06	-7.3355E+06	6.6076E+01	1.6669E-09	-6.0000E+06	-7.3202E+06	7.7992E-01	-6.2588E-01
6	-3.2731E-03	-9.9508E-03	-6.0152E+06	-6.0098E+06	1.2197E+04	-5.9997E+06	-6.0253E+06	6.6076E+01	7.8039E-10	-6.0000E+06	-6.0250E+06	7.7992E-01	-6.2588E-01
7	-5.1902E-03	-7.4674E-03	-7.2088E+06	-6.7784E+06	9.7003E+05	-5.9770E+06	-8.0103E+06	6.6076E+01	-3.4632E-09	-6.0000E+06	-7.9872E+06	7.7992E-01	-6.2588E-01
8	-4.0112E-03	-3.8680E-03	-5.0263E+06	-5.3730E+06	-7.8135E+05	-4.3808E+06	-6.0186E+06	6.6076E+01	1.7267E-09	-6.0000E+06	-4.3993E+06	7.7992E-01	-6.2588E-01
9	5.1395E-03	3.9088E-03	-5.5956E+06	-4.9567E+06	-6.4952E+05	-4.4850E+06	-6.0674E+06	-4.5470E+01	-8.1059E-11	-6.0000E+06	-4.5523E+06	-5.2851E-01	8.4893E-01
10	1.0868E-02	4.0614E-04	-6.3770E+06	-6.9728E+06	6.0559E+05	-5.9372E+06	-7.4126E+06	-4.5470E+01	-3.5356E-09	-6.0000E+06	-7.3498E+06	-5.2851E-01	8.4893E-01
11	1.1042E-02	-2.3935E-03	-5.5378E+06	-5.9302E+06	1.7965E+05	-5.4035E+06	-6.0645E+06	-2.4602E+01	3.7032E-09	-6.0000E+06	-5.4680E+06	9.3206E-01	3.6230E-01
12	4.6944E-03	-5.6378E-03	-9.7045E+06	-6.5597E+06	-1.4400E+06	-5.4829E+06	-1.0781E+07	-2.4602E+01	1.4716E-09	-6.0000E+06	-1.0264E+07	9.3206E-01	3.6230E-01
13	4.9494E-04	8.7837E-03	-8.0323E+06	-6.0000E+06	6.5938E-09	-5.5791E+06	-8.4532E+06	1.8590E-13	6.5938E-09	-6.0000E+06	-8.0323E+06	-1.0000E+00	0.0000E+00
14	6.5181E-03	9.3984E-03	-4.5614E+06	-6.0000E+06	-1.0083E-09	-4.2635E+06	-6.2979E+06	4.0160E-14	-1.0083E-09	-6.0000E+06	-4.5614E+06	-1.0000E+00	0.0000E+00
15	8.3437E-03	6.4508E-03	-5.8944E+06	-3.3204E+06	-5.3195E+05	-2.7111E+06	-6.5036E+06	-1.1676E+01	1.9277E-09	-6.0000E+06	-3.2149E+06	-1.9472E-01	9.8086E-01
16	6.5846E-03	2.9144E-03	-5.9391E+06	-4.4537E+06	-3.0696E+05	-4.1021E+06	-6.2906E+06	-1.1676E+01	2.2229E-09	-6.0000E+06	-4.3928E+06	-1.9472E-01	9.8086E-01
17	-9.3639E-18	6.6362E-04	2.2049E+06	-4.8537E+05	1.0183E-09	2.7620E+06	-1.0425E+06	-2.1687E-14	-1.0183E-09	2.2049E+06	-4.8537E+05	0.0000E+00	1.0000E+00
18	-6.6670E-18	4.7900E-04	-1.0358E+06	-1.0476E+06	8.5479E-11	-1.0334E+06	-1.0501E+06	-4.1408E-13	-8.5479E-11	-1.0358E+06	-1.0476E+06	0.0000E+00	1.0000E+00
19	-1.7370E-18	-9.9525E-18	-2.3045E+06	-2.7041E+06	-3.5027E+04	-2.2196E+06	-2.7890E+06	5.0101E+00	-1.9788E+03	-2.7071E+06	-2.3015E+06	9.9665E-01	-8.1814E-02
20	-6.5058E-18	1.4260E-17	-1.9987E+06	-4.5163E+06	-6.1170E+05	-1.3751E+06	-5.1399E+06	1.3656E+01	4.2518E+04	-4.6564E+06	-1.8586E+06	9.7101E-01	-2.3902E-01
21	-7.7953E-18	-6.8548E-18	-2.8835E+06	-4.8438E+06	-1.2136E+06	-2.0214E+06	-5.7059E+06	3.1761E+01	-1.4080E+05	-5.4172E+06	-2.3101E+06	9.2086E-01	-3.8989E-01
22	1.6453E-17	-6.5577E-18	-3.4085E+06	-4.8429E+06	-1.4848E+06	-2.3275E+06	-5.9239E+06	4.5988E+01	-1.8709E+04	-5.7746E+06	-2.4768E+06	8.5004E-01	-5.2671E-01
23	1.1303E-17	-2.4574E-17	-3.8280E+06	-4.6103E+06	-1.6720E+06	-2.4580E+06	-5.9803E+06	6.4924E+01	9.7644E+04	-5.9335E+06	-2.5048E+06	7.6553E-01	-6.4340E-01
24	-1.0348E-17	-2.3194E-18	-4.4887E+06	-4.5558E+06	-1.6907E+06	-2.8309E+06	-6.2136E+06	8.7728E+01	3.0266E+05	-6.1859E+06	-2.8585E+06	6.4829E-01	-7.6139E-01
25	-1.0605E-17	-1.2558E-17	-3.1264E+06	-1.6140E+06	-1.7645E+06	-3.0694E+05	-4.4334E+06	-4.9399E+01	-1.3617E+06	-3.7234E+06	-1.0170E+06	8.2895E-01	-5.5933E-01
26	5.8907E-18	-4.5396E-18	-2.6647E+06	-2.0951E+06	1.0611E+05	-1.9634E+06	-2.7964E+06	1.0553E+01	1.0842E+05	-2.6639E+06	-2.0960E+06	-3.5294E-01	-9.3565E-01
27	-1.5911E-17	1.3063E-17	-1.5987E+06	-6.1780E+05	-6.1780E+05	-6.2909E+05	-2.0591E+06	-5.0511E+01	4.7985E+05	-1.8091E+06	-8.7913E+05	1.8829E-01	-9.8211E-01
28	-1.2260E-17	-9.0003E-18	-4.6025E+06	-1.6814E+06	-7.9652E+05	-9.2822E+05	-5.3557E+06	-1.5253E+01	8.2963E+05	-4.5839E+06	-1.7000E+06	-1.1406E-02	-9.9993E-01
29	-2.6097E-17	8.1021E-18	-5.9389E+06	-2.6079E+06	6.8789E+05	-1.8197E+06	-6.7272E+06	1.1668E+01	2.6913E+04	-6.0752E+06	-2.4717E+06	-2.0191E-01	-9.7940E-01
30	1.1429E-18	-9.7178E-18	-5.1909E+06	-3.1615E+06	1.4768E+06	-2.1171E+06	-6.2353E+06	3.6044E+01	-3.5877E+05	-5.9317E+06	-2.4207E+06	-3.7426E-01	-9.2733E-01
31	-1.8988E-17	6.9495E-18	-2.5615E+06	-3.3710E+06	1.5948E+06	-1.2718E+06	-4.6607E+06	-6.3089E+01	-9.6375E+05	-4.2998E+06	-1.6327E+06	-5.6197E-01	-8.2716E-01
32	-6.9669E-18	-2.9243E-17	-1.7835E+05	-1.9377E+06	2.0067E+05	2.0210E+05	-2.3181E+06	-6.5072E+00	-8.7687E+05	-1.2706E+06	-8.4548E+05	-7.1187E-01	-0.2331E-01
33	1.0939E-17	-2.2097E-17	-1.6227E+06	-1.3705E+06	6.0266E+05	-8.6813E+05	-2.1251E+06	6.7298E+01	3.2698E+05	-2.0183E+06	-9.7491E+05	-8.2047E-01	-5.7170E-01
34	-1.6337E-19	5.6518E-19	-2.3747E+06	-3.6631E+06	1.0892E+06	-1.5989E+06	-4.4389E+06	-4.0213E+01	1.8514E+05	-4.2707E+06	-1.7671E+06	-9.0263E-01	-4.3041E-01
35	-1.3493E-18	-1.7343E-18	-2.4607E+06	-5.2047E+06	7.4937E+05	-1.7527E+06	-5.9127E+06	-1.5275E+01	-3.2095E+04	-5.3957E+06	-2.2697E+06	-9.6633E-01	-2.5730E-01
36	-1.5143E-18	-1.7051E-18	-4.6742E+06	-6.3100E+06	1.4078E+06	-3.6701E+06	-7.3141E+06	-4.0714E+01	1.2582E+06	-6.5255E+06	-4.4587E+06	-9.9675E-01	-8.0546E-02

Таблица 2. Параметры граничного элемента 17

Эл-т	XC	YC	Длина	Углы "	ГУ	US или SIGS	UN или SIGN
17	0,000000	0,450000	0,025000	0,000000	4	0,0000E+00	0,0000E+00

Библиографические ссылки

1. Демидов С. П. Теория упругости. – М. : Вышш. шк., 1979. – 492 с.
 2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука. 1966. – 709 с.

3. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М. : Мир, 1987. – 328 с.
 4. Фахрутдинов И. Х., Котельников А. В. Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. – М. : Машиностроение, 1981. – 328 с.

A. V. Aliev, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
 A. E. Kalinnikov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Numerical Solution of Plane Problem of Linear Elastic Theory with Nontrivial Geometry Using Boundary Element Method

The paper presents the procedure and results of numerical solution of plane problems of linear elasticity theory with complex geometry using the boundary element method. Application of this method is shown by example of solving the problem of stress concentration in solid rocket charge.

Key words: theory of elasticity, plane problem, boundary element method, stress concentration, solid rocket charge.