

УДК 536.24: 519.63

**А. М. Липанов**, академик РАН, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**С. С. Макаров**, кандидат технических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОХЛАЖДЕНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛ

*Рассматривается численное решение задачи охлаждения сопряженных высокотемпературных металлических тел прямоугольной формы. Приводится математическая модель процесса нестационарного теплообмена при граничных условиях III-IV рода. Получены результаты численных расчетов температур в зависимости от геометрии, теплофизических свойств материала тела и времени процесса охлаждения. Произведено сопоставление численных расчетов с аналитическими данными и результатами, полученными с помощью программы ANSYS.*

**Ключевые слова:** математическая модель, нестационарный теплообмен, охлаждение, высокотемпературное прямоугольное металлическое тело, численный расчет.

Одной из актуальных задач, связанной с численным расчетом нестационарного теплообмена сопряженных высокотемпературных металлических тел в охлаждающей среде, встречающейся во многих технических приложениях, является задача определения температур на границе сопрягаемых поверхностей и в произвольной точке охлаждаемого тела. При этом важным является математическая обоснованность физического процесса теплообмена.

### Математическое обоснование задачи

Как и при решении задачи, приведенной в [1], за основу возьмем дифференциальное уравнение Био – Фурье:

$$\frac{\partial}{\partial t} c\rho T = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) необходимо задать начальное и граничные условия. В качестве начального будем использовать условие  $T = T_{нач}$  при  $t = 0$ .

При задании граничных условий отметим, что если рассматривается одно тело, то начало отчета пространственной координаты  $x$  будем связывать с одним из его торцов (рис. 1).

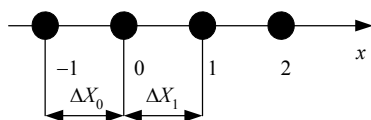


Рис. 1. Внутренние  $x_1$ ,  $x_2$  и фиктивная  $x_{-1}$  приграничные точки

В этом случае при  $x = 0$  используем условие

$$-\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha (T_l - T_0). \quad (2)$$

При  $x \rightarrow \infty$  имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda_m$  – коэффициент теплопроводности материала тела;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи;  $T_l$  – температура охлаждающей среды. Переменные  $\alpha$  и  $T_l$  считаем известными величинами, являющимися функциями времени;  $T_0$  – температура на границе охлаждаемого или нагреваемого тела при  $x = 0$ . Если рассматриваются два тела, находящиеся в контакте, то начало отсчета пространственной координаты  $x$  будем размещать на границе контакта тел (рис. 2). Направление увеличения координаты  $x$  показано на этом рисунке. В данном случае, как при  $x \rightarrow \infty$ , так и при  $x \rightarrow -\infty$  будем использовать условие (3). Уравнение (1) запишем в разностной форме по неявной разностной схеме для переменных шагов  $\Delta x$  интегрирования по пространственной координате  $x$  и переменных теплофизических свойств  $c, \rho, \lambda$ . Коэффициенты теплоемкости  $c$ , теплопроводности  $\lambda$  и плотность  $\rho$  считаем известными функциями температуры  $T$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} & (c\rho)_i^{n+1} T_i^{n+1} - (c\rho)_i^n T_i^n = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_i} \left[ \frac{\lambda_{i+0,5}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}} (T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}) - \frac{\lambda_{i-0,5}^{n+1}}{\Delta x_i} (T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}) \right] (1 - \sigma) + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{\Delta \bar{x}_i} \left[ \frac{\lambda_{i+0,5}^n}{\Delta x_{i+1}} (T_{i+1}^n - T_i^n) - \frac{\lambda_{i-0,5}^n}{\Delta x_i} (T_i^n - T_{i-1}^n) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь  $n$  – номер шага интегрирования по времени;  $i$  – номер шага интегрирования по пространственной координате  $x$ ;  $\sigma$  – весовой параметр, изменяющийся в интервале  $[0, 1]$ ;  $\Delta x_i$  – шаг интегрирования по пространственной координате  $x$ , соответствующий интервалу  $[i-1, i]$ ; коэффициенты теплопроводности  $\lambda_{i+0,5}$  и  $\lambda_{i-0,5}$  относятся к серединам отрезков  $[i, i+1]$  и  $[i-1, i]$  соответственно;  $\Delta \bar{x}_i = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}$ .

Преобразуем уравнение (4) к виду, удобному для решения методом прогонки [2]:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i T_{i-1}^{n+1} = -F_i. \quad (5)$$

$$\text{Здесь } A_i = \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_i} \frac{\lambda_{i+0,5}^{n+1}}{\Delta x_{i+1}} (1-\sigma); \quad B_i = \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_i} \frac{\lambda_{i-0,5}^{n+1}}{\Delta x_i} (1-\sigma);$$

$$C_i = (c\rho)_i^{n+1} + A_i + B_i;$$

$$F_i = (c\rho)_i^n T_i^n + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{\Delta \bar{x}_i} \times \left[ \frac{\lambda_{i+0,5}^n}{\Delta x_{i+1}} (T_{i+1}^n - T_i^n) - \frac{\lambda_{i-0,5}^n}{\Delta x_i} (T_i^n - T_{i-1}^n) \right].$$

Подставим в уравнение (5) выражение

$$T_{i-1}^{n+1} = \beta_i^{n+1} + \alpha_i^{n+1} T_i^{n+1}. \quad (6)$$

Будем иметь:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - C_i T_i^{n+1} + B_i [\beta_i^{n+1} + \alpha_i^{n+1} T_i^{n+1}] + F_i = 0.$$

$$\text{Отсюда найдем: } T_{i+1}^{n+1} = \beta_{i+1}^{n+1} + \alpha_{i+1}^{n+1} T_{i+1}^{n+1}, \quad (7)$$

где  $\beta$  и  $\alpha$  – прогоночные коэффициенты [1].

$$\beta_{i+1}^{n+1} = \frac{B_i \beta_i^{n+1} + F_i}{C_i - B_i \alpha_i}; \quad \alpha_{i+1}^{n+1} = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_i}. \quad (8)$$

При записанных выше граничных условиях разностная задача для уравнения (5) решается следующим образом.

Пусть используется граничное условие (3) и рассматривается система двух тел. Индекс  $i$  при  $x=0$  принимаем равным нулю. В глубине тела  $m_1$  он равен  $-m$ , а в глубине тела  $m_2$  он равен  $N$ . Тогда при  $x=-\infty$  в соответствии с равенством (6) имеем:  $\beta_{-m} = 0$ ; и  $\alpha_{-m} = 1$ .

Имея величины  $\beta_{-m}$  и  $\alpha_{-m}$ , подставляем их в равенства (8) и при известных выражениях для  $A_i, C_i, B_i, F_i$  находим последовательно все  $\beta_i$  и  $\alpha_i$ , в том числе  $\beta_N$  и  $\alpha_N$ . Далее используем вновь граничное условие (3), но при  $x \rightarrow \infty$ . Здесь при  $i=N$  имеем  $T_{N-1} = T_N$ . Тогда при  $i=N-1$  из равенства (7) находим:

$$T_{N-1} = \frac{\beta_N}{1 - \alpha_N}. \quad (9)$$

Если  $\alpha_N \neq 1$  и меньше единицы, то обратной прогонкой сначала для  $i=N-2$  находим  $T_{N-2} = \beta_{N-1} + \alpha_{N-1} T_{N-1}$ , а затем для всех  $i$  до  $i=-m$  включительно определяем рекуррентно распределение температуры.

Поскольку в равенство (9) входит разность  $(1 - \alpha_N)$ , важно убедиться, что  $\alpha_N$  не только не равно единице, но и меньше ее.

Имея при  $i=-m$   $\alpha_{-m} = 1$ , из выражения (8) для  $\alpha_{i+1}$  находим:

$$\alpha_{-m+1} = \frac{A_{-m}}{C_{-m} - B_{-m} \alpha_{-m}} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m}} \frac{\lambda_{-m+0,5}^{n+1}}{\Delta x_{-m+1}} (1-\sigma)}{(c\rho)_{-m} + \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m}} \left( \frac{\lambda_{-m+0,5}^n}{\Delta x_{-m+1}} + \frac{\lambda_{-m-0,5}^n}{\Delta x_{-m}} \right) (1-\sigma) - \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m}} \frac{\lambda_{-m-0,5}^n}{\Delta x_{-m}} (1-\sigma) \alpha_{-m}}.$$

Видим, что при  $\alpha_{-m} = 1$  последнее слагаемое в знаменателе сократится с третьим слагаемым. Поэтому получим:

$$\alpha_{-m+1} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m}} \frac{\lambda_{-m+0,5}^{n+1}}{\Delta x_{-m+1}} (1-\sigma)}{(c\rho)_{-m} + \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m}} \left( \frac{\lambda_{-m+0,5}^n}{\Delta x_{-m+1}} \right) (1-\sigma)}.$$

В полученном выражении для  $\alpha_{-m+1}$  второе слагаемое в знаменателе равно по величине числителю. Кроме того оба слагаемых в знаменателе положительные. Отсюда следует, что знаменатель в выражении для  $\alpha_{-m+1}$  больше числителя, и  $\alpha_{-m+1} < 1$ . Аналогично для  $\alpha_{-m+2}$  получим:

$$\alpha_{-m+2} = \frac{\frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m+1}} \frac{\lambda_{-m+1,5}^{n+1}}{\Delta x_{-m+2}} (1-\sigma)}{(c\rho)_{-m+1} + \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m+1}} \left( \frac{\lambda_{-m+1,5}^n}{\Delta x_{-m+2}} + \frac{\lambda_{-m-0,5}^n}{\Delta x_{-m+1}} \right) (1-\sigma) - \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_{-m+1}} \frac{\lambda_{-m-0,5}^n}{\Delta x_{-m+1}} (1-\sigma) \alpha_{-m+1}}.$$

Если бы  $\alpha_{-m+1}$  было равно единице, то последнее слагаемое в знаменателе выражения для  $\alpha_{-m+2}$  сократилось бы с его третьим слагаемым.

Но  $\alpha_{-m+1} < 1$ , поэтому, вычитая последнее слагаемое в знаменателе выражения для  $\alpha_{-m+2}$  из его третьего слагаемого, получим положительное число. Остальные слагаемые в анализируемом равенстве также положительные. Одновременно видим, что числитель выражения для  $\alpha_{-m+2}$  совпадает со вторым слагаемым знаменателя. Из сказанного выше следует, что знаменатель выражения  $\alpha_{-m+2}$  больше его числителя и, следовательно  $\alpha_{-m+2} < 1$ . Аналогично можно показать, что и при других  $i > -m+2$  все  $\alpha_i < 1$ , включая  $\alpha_N$ . Итак, деление на  $(1 - \alpha_N)$  в равенстве (9) возможно.

Поскольку в уравнении (1) теплофизические параметры  $c, \rho, \lambda$  переменные, изложим алгоритм решения уравнения (5) для этого случая. Предполагаем зависимости  $c, \rho, \lambda$  от температуры слабыми, позволяющими использование метода последовательных приближений. Поэтому в 1-м приближении на  $(n+1)$ -м временном слое их величины будем приравнивать соответствующим значениям на  $n$ -м временном слое. Выполнив прямую и обратную прогонки, уточняем величины переменных  $c, \rho, \lambda$  и вновь уже во 2-м

приближении выполняем расчеты. И так пока процесс вычислений не сойдется. На остальных шагах интегрирования по времени поступаем аналогично. Если используется граничное условие (2), то воспользуемся фиктивной точкой  $x_{-1}$  (см. рис. 1).

Здесь на рис.1 показаны точки  $x_0, x_1, x_2$  в окрестности границы  $x = 0$  и фиктивная точка  $x_{-1}$ . Расположим фиктивную точку  $x_{-1}$  слева от границы  $x = 0$  на расстоянии  $\Delta x_0$ . Величину отрезка  $\Delta x_0$  будем считать отличающейся от величины соседнего отрезка  $\Delta x_1$ . С помощью граничного условия (2) находим:

$$T_1^{n+1} - T_{-1}^{n+1} = -\frac{\alpha^{n+1}}{\lambda_m^{n+1}} (\Delta x_0 + \Delta x_1) (T_1^{n+1} - T_0^{n+1}). \quad (10)$$

Запишем уравнение (4) при  $i = 0$ . Получим:

$$\begin{aligned} & (cp)_0^{n+1} T_0^{n+1} - (cp)_0^n T_0^n = \\ & = \frac{\Delta t}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{0,5}^{n+1}}{\Delta x_1} (T_1^{n+1} - T_0^{n+1}) - \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\Delta x_0} (T_0^{n+1} - T_{-1}^{n+1}) \right] (1 - \sigma) + \\ & + \frac{\Delta t \cdot \sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{0,5}^n}{\Delta x_1} (T_1^n - T_0^n) - \frac{\lambda_{-0,5}^n}{\Delta x_0} (T_0^n - T_{-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Подставив в него  $T_{-1}^{n+1}$  из уравнения (10), найдем:  $T_0^{n+1} = \beta_1^{n+1} + \alpha_1^{n+1} T_1^{n+1}$ , где

$$\begin{aligned} \alpha_1^{n+1} &= \frac{\Delta t (1 - \sigma) \left( \frac{\lambda_{0,5}^{n+1}}{\Delta x_1} + \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\Delta x_0} \right)}{\Delta \bar{x}_0}; \\ \beta_1^{n+1} &= \frac{(cp)_0^n T_0^n + \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \left( \alpha^{n+1} \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1} \Delta x_0 + \Delta x_1}{\lambda_0^{n+1}} \right) T_1^{n+1}}{(cp)_0^{n+1} + \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \left( \frac{\lambda_{0,5}^{n+1}}{\Delta x_1} + \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\Delta x_0} + \alpha^{n+1} \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1} \Delta x_0 + \Delta x_1}{\lambda_0^{n+1}} \right)} + \\ & + \frac{\frac{\Delta t \sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left( \frac{\lambda_{0,5}^n}{\Delta x_1} (T_1^n - T_0^n) - \frac{\lambda_{-0,5}^n}{\Delta x_0} (T_0^n - T_{-1}^n) \right)}{(cp)_0^{n+1} + \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \left( \frac{\lambda_{0,5}^{n+1}}{\Delta x_1} + \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1}}{\Delta x_0} + \alpha^{n+1} \frac{\lambda_{-0,5}^{n+1} \Delta x_0 + \Delta x_1}{\lambda_0^{n+1}} \right)}. \end{aligned}$$

Из выражения для  $\alpha_1^{n+1}$  следует, что  $\alpha_1^{n+1}$  положительное, все слагаемые в знаменателе тоже положительны и числитель является частью знаменателя. Это значит, что знаменатель в выражении для  $\alpha_1^{n+1}$  больше числителя и  $\alpha_1^{n+1} < 1$ . Выполнив далее анализ величин коэффициента  $\alpha_2^{n+1}$ , как и выше, убедимся, что  $\alpha_2^{n+1}$ , и вслед за ним все остальные  $\alpha_i^{n+1}$  ( $i = 3, 4, \dots, N$ ) тоже меньше единицы. Далее рассмотрим трехмерное уравнение теплопроводности. В декартовых координатах имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} cpT = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (11)$$

Будем решать это уравнение методом расщепления [3], сводя решение трехмерной задачи к трем одномерным. Поэтому в разностной форме получим:

$$\begin{aligned} & (cpT)_{i,j,h}^{n+\frac{1}{3}} = (cpT)_{i,j,h}^n + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{x}_i} \left[ \frac{\lambda_{i+0,5}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x_{i+1}} (T_{i+1} - T_i)^{n+\frac{1}{3}} - \frac{\lambda_{i-0,5}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x_i} (T_i - T_{i-1})^{n+\frac{1}{3}} \right] + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t \sigma}{\Delta \bar{x}_i} \left[ \frac{\lambda_{i+0,5}^n}{\Delta x_{i+1}} (T_{i+1} - T_i)^n - \frac{\lambda_{i-0,5}^n}{\Delta x_i} (T_i - T_{i-1})^n \right]; \\ & (cpT)_{i,j,h}^{n+\frac{2}{3}} = (cpT)_{i,j,h}^{n+\frac{1}{3}} + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{y}_j} \left[ \frac{\lambda_{j+0,5}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y_{j+1}} (T_{j+1} - T_j)^{n+\frac{2}{3}} - \frac{\lambda_{j-0,5}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y_j} (T_j - T_{j-1})^{n+\frac{2}{3}} \right] + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t \sigma}{\Delta \bar{y}_j} \left[ \frac{\lambda_{j+0,5}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y_{j+1}} (T_{j+1} - T_j)^{n+\frac{1}{3}} - \frac{\lambda_{j-0,5}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta y_j} (T_j - T_{j-1})^{n+\frac{1}{3}} \right]; \\ & (cpT)_{i,j,h}^{n+1} = (cpT)_{i,j,h}^{n+\frac{2}{3}} + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t (1 - \sigma)}{\Delta \bar{z}_h} \left[ \frac{\lambda_{h+0,5}^{n+1}}{\Delta z_{h+1}} (T_{h+1} - T_h)^{n+1} - \frac{\lambda_{h-0,5}^{n+1}}{\Delta z_h} (T_h - T_{h-1})^{n+1} \right] + \\ & + \frac{1}{3} \frac{\Delta t \sigma}{\Delta \bar{z}_h} \left[ \frac{\lambda_{h+0,5}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z_{h+1}} (T_{h+1} - T_h)^{n+\frac{2}{3}} - \frac{\lambda_{h-0,5}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta z_h} (T_h - T_{h-1})^{n+\frac{2}{3}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $i, j, h$  – номера узловых точек вдоль пространственных направлений  $x, y, z$  соответственно. Каждое из трех записанных разностных уравнений позволяет продвинуться на  $1/3$  временного шага  $\Delta t$  в процессе вычисления распределения температуры по одной из пространственных координат.

В этом случае метод прогонки, используемый для одномерного уравнения теплопроводности, применим для решения трехмерного уравнения (11).

Пусть далее речь идет не об однородном материале, а о среде, состоящей из двух материалов (металлов) *metall* и *metal2*. На границе их сопряжения должно выполняться граничное условие IV рода, которое подразумевает равенство температур  $T_0^{m1} = T_0^{m2}$  на границе раздела двух сопрягаемых тел и тепловых потоков, проходящих через границу сопряжения:

$$\lambda^{m1} \frac{\partial T_0^{m1}}{\partial x} = \lambda^{m2} \frac{\partial T_0^{m2}}{\partial x}. \quad (12)$$

Обозначим границу двух разных металлов, как это показано на рис. 2, в виде прямой *EF*. Пусть ин-

декс ноль – это номер в точке  $V$ . Введем две фиктивные точки  $A$  и  $B$ . Пусть точка  $A$  находится на продолжении кривой  $DA$ , а точка  $B$  – на продолжении кривой  $CB$ . Принимаем, что первая точка в *metal2* находится на том же удалении от границы  $FE$ , равном  $\Delta x_1$ , что и точка  $A$ , а последняя точка в *metall* – на том же удалении от границы  $FE$ , равном  $\Delta x_0$ , что и точка  $B$ .

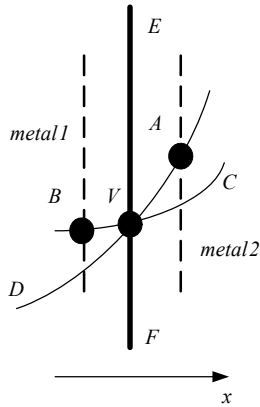


Рис. 2. Граница перехода

Считаем, что шаги  $(\Delta x_{1m})_0$  и  $(\Delta x_{2m})_1$  не совпадают. Для удобства вычислений примем, что шаг  $(\Delta x_{2m})_1$  в целое число, раз отличается от шага  $(\Delta x_{1m})_0$ . Кроме того, коэффициенты  $c, \rho, \lambda$  будем рассматривать переменными. Из уравнения (12) отнесенного к  $(n+1)$ -му временному слою, получаем:

$$\lambda_0^{n+1} \frac{T_A - T_{-1}}{\Delta x_1 + \Delta x_0} = \lambda_0^{n+2} \frac{T_1 - T_B}{\Delta x_1 + \Delta x_0}. \quad (13)$$

В точке  $V$  для материалов *metall* и *metal2* имеем:

$$\begin{aligned} (c\rho T)_{0,m1}^{n+1} &= (c\rho T)_{0,m1}^n + \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \times \\ &\times \left[ \frac{\lambda_{0,m1}^{n+1}}{\Delta x_1} (T_A - T_0)^{n+1} - \frac{\lambda_{-0,5,m1}^{n+1}}{\Delta x_0} (T_0 - T_{-1})^{n+1} \right] + \\ &+ \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{0,m1}^n}{\Delta x_1} (T_A - T_0)^n - \frac{\lambda_{-0,5,m1}^n}{\Delta x_0} (T_0 - T_{-1})^n \right]; \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (c\rho T)_{0,m2}^{n+1} &= (c\rho T)_{0,m2}^n + \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \times \\ &\times \left[ \frac{\lambda_{+0,5,m2}^{n+1}}{\Delta x_1} (T_1 - T_0)^{n+1} - \frac{\lambda_{0,m2}^{n+1}}{\Delta x_0} (T_0 - T_B)^{n+1} \right] + \\ &+ \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{+0,5,m2}^n}{\Delta x_1} (T_1 - T_0)^n - \frac{\lambda_{0,m2}^n}{\Delta x_0} (T_0 - T_B)^n \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta \bar{x}_0 = \frac{\Delta x_0 + \Delta x_1}{2}$ ;  $\Delta x_0$  – отрезок  $VB$ ;  $\Delta x_1$  – отрезок  $AV$ .

Используя уравнения (14) и (15), исключим фиктивные переменные  $T_A$  и  $T_B$  в уравнении (13). Получим равенство

$$A_0 T_1^{n+1} - C_0 T_0^{n+1} + B_0 T_{-1}^{n+1} + F_0 = 0, \quad (16)$$

содержащее на  $(n+1)$ -м временном слое только переменные  $T_1^{n+1}$ ,  $T_0^{n+1}$ ,  $T_{-1}^{n+1}$ .

Здесь

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \frac{\lambda_{+0,5,m2}^{n+1}}{\Delta x_1} \left[ 1 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \frac{\lambda_{+0,5,m2}^{n+1}}{\lambda_{0,m2}^{n+1}} \right]; \\ B_0 &= \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \frac{\lambda_{-0,5,m1}^{n+1}}{\Delta x_0} \left[ 1 + \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \frac{\lambda_{+0,5,m1}^{n+1}}{\lambda_{-0,5,m1}^{n+1}} \right]; \\ C_0 &= \frac{\Delta t(1-\sigma)}{\Delta \bar{x}_0} \times \\ &\times \left[ \frac{\lambda_{0,m1}^{n+1}}{\Delta x_1} + \frac{\lambda_{-0,5,m1}^{n+1}}{\Delta x_0} + \frac{\lambda_{+0,5,m1}^{n+1}}{\Delta x_1} + \frac{(\lambda_{+0,5,m2}^{n+1})^2}{(\Delta x_1)^2} \cdot \frac{\Delta x_0}{\lambda_{0,m2}^{n+1}} \right]; \\ F_0 &= (c\rho)_{0,m1}^n T_0^n + \\ &+ \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{0,m1}^n}{\Delta x_1} (T_A - T_0)^n - \frac{\lambda_{-0,5,m1}^n}{\Delta x_0} (T_0 - T_{-1})^n \right] + \\ &+ \frac{\lambda_{0,m1}^{n+1}}{\lambda_{-0,5,m1}^{n+1}} \frac{\Delta x_0}{\Delta x_1} \left\{ (c\rho)_{0,m2}^n T_0^n + \right. \\ &\left. + \frac{\Delta t\sigma}{\Delta \bar{x}_0} \left[ \frac{\lambda_{+0,5,m2}^n}{\Delta x_1} (T_1 - T_0)^n - \frac{\lambda_{0,m2}^n}{\Delta x_0} (T_0 - T_B)^n \right] \right\}. \end{aligned}$$

Перемещаясь в направлении увеличения  $i$  в однородном материале  $m1$  и показывая, что все  $\alpha_i$  ( $i = 2, 3, \dots$ ) меньше единицы, получим и  $\alpha_0 < 1$ . Подставим в уравнение (16) выражение  $T_{-1}^{n+1} = \beta_0^{n+1} + \alpha_0^{n+1} T_0^{n+1}$ , получим:

$$A_0 T_1^{n+1} - C_0 T_0^{n+1} + B_0 [\beta_0^{n+1} + \alpha_0^{n+1} T_0^{n+1}] + F_0 = 0.$$

Отсюда  $T_0^{n+1} = \beta_1^{n+1} + \alpha_1^{n+1} T_1^{n+1}$ , где

$$\beta_1^{n+1} = \frac{B_0 \beta_0^{n+1} + F_0}{C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}}; \quad \alpha_1^{n+1} = \frac{A_0}{C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}}.$$

Рассмотрим разность  $C_0 - B_0 \alpha_0^{n+1}$ . Видим, что коэффициент  $B_0$  совпадает с первыми двумя слагаемыми  $C_0$ . Но так как  $\alpha_0^{n+1} < 1$ , то в результате вычитания  $B_0 \alpha_0^{n+1}$  из двух первых слагаемых  $C_0$  получим положительное число. Коэффициент  $A_0$  совпадает с двумя следующими слагаемыми  $C_0$ . Учитывая наличие других положительных слагаемых в выражении  $C_0$  можем утверждать, что знаменатель выражения для  $\alpha_1^{n+1}$  больше числителя, и поэтому  $\alpha_1^{n+1} < 1$ .

Имея  $\alpha_1^{n+1} < 1$ , для  $\alpha_i^{n+1}$  ( $i = 2, 3, \dots, N$ ) с  $i \geq 2$  можем показать так, как это было выполнено выше, что они тоже меньше единицы.

Для получения сходящегося решения с заданной точностью необходимо сделать измельчения разностных сеток как со стороны *metal1*, так и со стороны *metal2* (рис. 3).

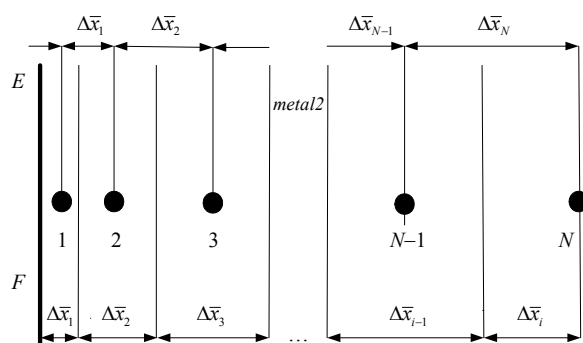


Рис. 3. Измельчение сетки на границе перехода

**Результаты численных расчетов**

**Пример 1.** Для верификации математической модели проведем сопоставления результатов численных расчетов с результатами аналитического решения двумерной задачи охлаждения балки прямоугольного сечения: задача № 61 [4]. Расчетная схема для тела, имеющего размеры  $X = 0,4$  м;  $Y = 0,32$  м, приведенная на рис. 4, состоит из 6200 расчетных узлов, в том числе по  $X = 62$  узла, по  $Y = 100$ . Начальная температура тела  $T_0 = 1000$  °С, температура охлаждающей среды  $T_l = 20$  °С. Коэффициент теплопроводности материала тела  $\lambda = 32$  Вт/(м·°С), коэффициент температуропроводности  $a = 7 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Коэффициент теплоотдачи с поверхности в процессе охлаждения принят

постоянным и равным  $\alpha = 170$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С). Расчетное время охлаждения  $t = 3600$  с. Сгущение сетки производим только по направлению координаты  $X$  с кратностью равной  $k = 2\Delta\bar{x}_i/\Delta\bar{x}_1$ . Результаты расчетов приведены на рис. 5 и в табл. 1.

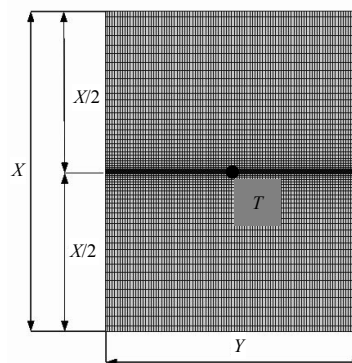


Рис. 4. Схема двумерной расчетной области

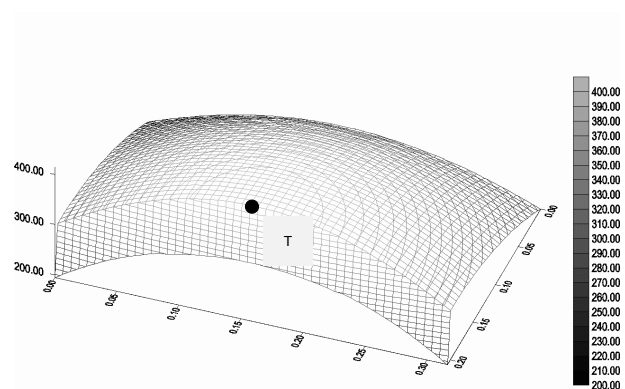


Рис. 5. Температурное поле,  $k = 19$ , расчет по модели

Таблица 1. Сравнение температуры в центре на оси расчетной области

Кол-во расчетных узлов $X/Y$	Численное решение по предлагаемой модели				Аналитическое решение [4]	Численное решение ANSYS
	шаг по времени $\Delta t$ , с					
62/100	Температура в центре на оси расчетной области $T$ , °С				≈ 415	≈ 413
124/200						
		414,15	414,20	414,21		
		413,47	413,38	413,18		

Из табл. 1 видно, что численные результаты, полученные по предлагаемой модели, имеют тот же порядок, что результаты аналитического решения. Одновременно полученное численное решение было сопоставлено с решением по ANSYS CFX (Academic research CFX Pad App лицензия инв. № M000014044 от 2007 г. ИжГТУ). При расчете в ANSYS CFX сетка принималась равномерная, количество расчетных узлов по  $X = 62$ , а по  $Y = 100$ , шаг по времени  $\Delta t = 0,2$  с. Температура в центре на оси расчетной области (рис. 5) имеет незначительное отклонение, связанное с выбором расчетного шага сетки по координатам и времени. Численное решение по предлагаемой модели стремится к решению ANSYS при

уменьшении временного шага и измельчении расчетной сетки.

**Пример 2.** Рассмотрим пример 1 с геометрией расчетной сетки  $X = 0,01$  м;  $Y = 0,01$  м;  $Z = 0,01$  м. Расчетная схема состоит из 620000 расчетных узлов, в том числе по  $X = 62$ ; по  $Y = 100$ ; по  $Z = 100$ . Примем, что  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .  $\lambda_1 = 32$  Вт/(м·°С) на участке  $X/2$ , а второй участок  $X/2$  имеет  $\lambda_2 = 57$  Вт/(м·°С).

При заданных исходных данных примера расхождение результатов по предлагаемой модели (рис. 6, а) с численным решением в ANSYS (рис. 6, б) составило порядка 0,3 % (табл. 2). Это связано в первую очередь с методом решения и расчетными параметрами сетки.

**Пример 3.** Воспользуемся геометрическими параметрами расчетной сетки примера 2 при условии, что теплофизические параметры материала тела  $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $c, \rho, \lambda$  будут переменными. Примем в качестве материала сталь 45. Параметры для металла изменяются согласно интерполяционным зависимостям, полученным при обработке табличных данных [5] в диапазоне от 20 до 800 °С:

$$\lambda = -0,000025529T^2 - 0,00668764T + 48,58873;$$

$$c = 0,00020939T^2 + 0,14089T + 476,08223;$$

$$\rho = 0,0000951467T^2 - 0,4018T + 7839,6.$$

Расчет проведем с начальной температурой тела  $T_0 = 800$  °С, температура охлаждающей среды  $T_i = 20$  °С,  $k = 19$ .

Расхождение полученных результатов по разработанной модели (рис. 7, а) с численным решением в ANSYS (рис. 7, б) составило для граничных и центральных узлов порядка 0,5 %. Это расхождение, по-видимому, также связано в первую очередь с методом решения и расчетными параметрами сетки.

Таблица 2. Температуры в расчетных узлах за время  $t = 25$  с, шаг по времени  $\Delta t = 0,03$  с

Расчетный узел	Численное решение по предлагаемой модели	
	$k = 19$	$k = 25$
1,1,1	673,5985	673,3572
X,1,1	681,5629	676,9914
X/2,1,1	680,7321	681,6187
X/2+1,1	680,8598	681,6586
X/2,Y/2,1	689,2280	690,1262
X/2+1,Y/2,1	689,3574	690,1666
X/2,Y/2,Z/2	<b>706,2782</b>	<b>706,3057</b>
X/2+1,Y/2,Z/2	<b>706,3623</b>	<b>706,3347</b>

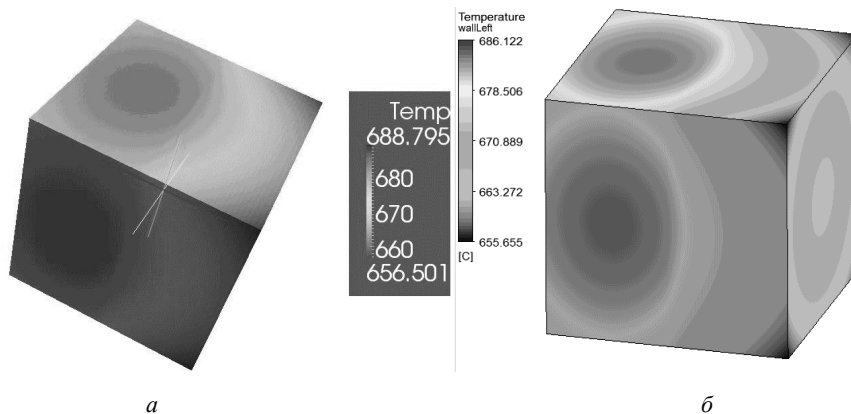


Рис. 6. Температура в расчетных узлах за время  $t = 25$  с, шаг по времени  $\Delta t = 0,03$  с: а – расчет по предлагаемой модели  $k = 25$ ; б – расчет в ANSYS

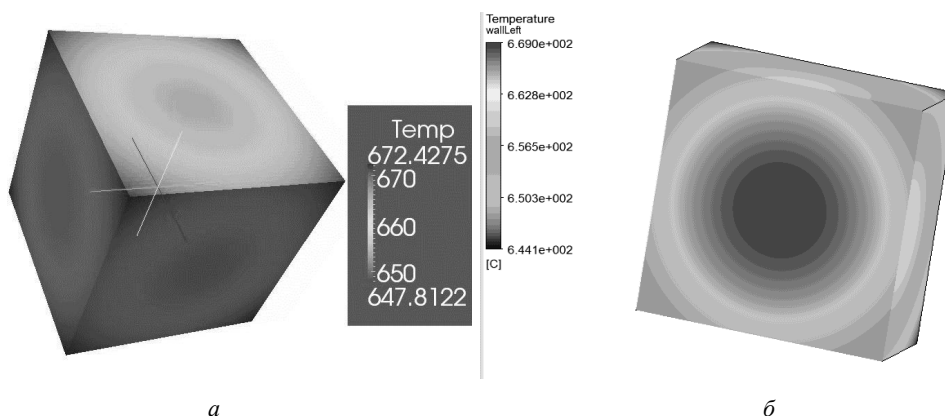


Рис. 7. Температура в расчетных узлах за время  $t = 10$  с, шаг по времени  $\Delta t = 0,03$  с,  $c, \rho, \lambda = f(T)$ : а – расчет по модели; б – расчет в ANSYS

### Заключение

Приведенные результаты численных решений задач нестационарного теплообмена при охлаждении высокотемпературного металлического тела прямоугольной формы в зависимости от геометрии, теплофизических свойств материала тела и времени процесса показывают адекватность разработанной математической модели. Сопоставление численных расчетов с аналитическими данными и результатами, полученными с помощью программы ANSYS, позволяет говорить об удовлетворительной точности расчетной модели.

Это значит, что изложенный в статье алгоритм численного решения уравнений (1) и (11) можно применять и при решении других задач, где программы ANSYS не могут быть использованы.

### Библиографические ссылки

1. Липанов А. М., Макаров С. С. Численное решение задачи нестационарного теплообмена при охлаждении высокотемпературного металлического тела прямоугольной формы // Вестник ИжГТУ. – 2012. – №. 2(54). – С. 35–38.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
4. Лобасова М. С. Тепломассобмен: учеб. пособие к практическим занятиям. – Красноярск: ИПК СФУ, 2009. – 156 с.
5. Марочник сталей и сплавов / под общ. ред. А. С. Зубченко. – М.: Машиностроение, 2003. – 784 с.

A. M. Lipanov, Academician of RAS, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University  
S. S. Makarov, PhD in Engineering, Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

### Numerical Solution of Cooling Problem for Conjugated Rectangular High-Temperature Metal Bodies

*The paper considers the numerical solution of the cooling problem for conjugated high-temperature rectangular metal bodies. The mathematical model of unsteady heat transfer process with boundary conditions of the III-IV types is presented. Results of temperature numerical calculations depending on the geometry, thermal properties of the body material and the cooling time are obtained. Numerical results are compared with analytical data and results obtained by means of ANSYS.*

**Key words:** mathematical model, unsteady heat transfer, cooling, high-temperature rectangular metal body, numerical calculation.

УДК 621.74.002.6

**В. Б. Дементьев**, доктор технических наук, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

**П. Г. Овчаренко**, аспирант, Институт механики УрО РАН, Ижевск

**А. Ю. Лещёв**, Институт механики УрО РАН, Ижевск

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УГЛЕРОДА НА СОСТАВ И СТРУКТУРУ ЛЕГИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СТАЛЬНЫХ ОТЛИВОК ПРИ ЛИТЬЕ ПО ГАЗИФИЦИРУЕМЫМ МОДЕЛЯМ (ЛГМ)

*Рассмотрен способ поверхностного легирования стальных отливок углеродом путем нанесения пасты на модель. Определена глубина слоя, его структура и твердость в зависимости от содержания углерода в заливаемом расплаве; представлены результаты металлографических исследований и химического анализа легированных поверхностей отливок.*

**Ключевые слова:** поверхностное легирование, углерод, литье по газифицируемым моделям.

Одним из основных направлений в технологиях получения отливок является разработка и совершенствование специальных способов литья, применение которых способствует снижению трудозатрат и металлоемкости отливок, достижению высоких физико-механических и эксплуатационных свойств литых деталей. К данным способам можно отнести суспензионное литье, литье под высоким и низким давлением, литье под воздействием центробежных сил, электромагнитных полей и др. [1, 2]. Одним из способов получения отливок высокой точности, получившим распространение в последнее время, является литье по газифицируемым моделям

(ЛГМ), а применение поверхностного легирования в процессе ЛГМ позволяет формировать легированный слой, обладающий требуемыми свойствами [3].

### Описание способа поверхностного легирования

Способ осуществляется следующим образом. Паста на основе порошка сажи (элементарного углерода) наносилась на одну из сторон квадратной модели из пенополистирола слоем 0,8...1,0 мм. После сушки слоя легирующего покрытия к моделям приклеивали элементы литниково-питающей системы и окрашивали модельные блоки антипригарным покрытием на основе оксида алюминия. Для получения отливок модельные блоки помещали в опоку, засыпали опор-