

УДК 621.791.72

**В. Я. Беленький**, доктор технических наук, Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
**Д. Н. Трушников**, кандидат технических наук, Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
**Е. С. Саломатова**, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

**В. М. Язовских**, доктор технических наук, профессор, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ СВАРОЧНЫХ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

*На основе общих принципов регулирования систем с распределенными параметрами предлагается математическое описание концентрированных сварочных тепловых источников. Для математического описания использовались дельта-функция Дирака и единичные функции Хевисайда. Приведены тепловые источники различной формы, характерные для большинства способов сварки плавлением с использованием концентрированных источников тепла и проанализированы возможности изменения их формы.*

**Ключевые слова:** моделирование сварочных процессов, концентрированные сварочные источники, электронно-лучевая сварка.

Сварочные процессы с использованием высококонцентрированных тепловых источников относятся к высокотемпературным технологическим процессам, при которых нагрев и охлаждение свариваемых изделий могут привести к значительным изменениям свойств и состояния материала и оказывать влияние на качество всей конструкции в целом. Большинство технологических и исследовательских задач указанных сварочных процессов можно решить с помощью математического моделирования. Для этого используются модели, основанные как на численных, так и на аналитических решениях. Как правило, значительная часть аналитических математических моделей построена на основе общей теории теплопроводности.

Одним из самых распространенных методов решения параболических дифференциальных уравнений в математической физике является метод функций Грина. Так, в работе [1] в общем виде содержатся решения более 2000 стационарных и нестационарных краевых задач математической физики различными методами, в том числе и методом функций Грина. В интегральной форме решение дифференциального уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями в декартовой системе координат имеет вид

$$T(x, x', y, y', z, z', t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', y, y', z, z', t) \times F(x', y', z', \tau) \partial r' \partial \phi' \partial z' \partial t, \quad (1)$$

где  $F(x', y', z', t)$  – функция сварочного источника тепла;  $G(x, x', y, y', z, z', t)$  – функция Грина конкретной задачи;  $x, y, z$  – координаты контрольной точки;  $x', y', z'$  – координаты теплового источника.

Из выражения (1) видно, что окончательное решение в значительной степени определяется параметра-

ми теплового сварочного источника. Таким образом, для построения математической модели необходимо на предварительном этапе дать математическое описание источников теплового воздействия.

Математическое описание подвижных концентрированных источников воздействия (электронный пучок и лазерный луч) в общем виде рассмотрено в работах [2–4]. В соответствии с изложенными в этих работах положениями источник тепла при лазерном или электронно-лучевом воздействии можно представить в виде

$$F(r, t) = AU(t)\psi[r - s(t), p(t), \omega(t), t], \quad (2)$$

где  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $A$  – поглощательная способность обрабатываемого материала;  $U(t)$  – закон изменения интенсивности источника воздействия во времени;  $\psi(\varepsilon)$  – закон изменения формы источника;  $s(t)$  – закон поступательного движения источника;  $p(t)$  – закон изменения параметров формы источника;  $\omega(t)$  – закон вращательного движения.

При сварке плавлением при использовании концентрированных источников тепла можно принять, что коэффициент поглощательной способности  $A$  учитывается в коэффициенте полезного действия  $\eta$ . Примем также, что интенсивность источника воздействия  $U(t)$  и форма источника  $p(t)$  постоянны и не зависят от времени; вращательное движение источника отсутствует.

Рассмотрим закон изменения формы источника  $\psi(\varepsilon)$  с учетом принятых допущений. Для описания формы реальных источников могут использоваться различные законы распределения плотности воздействия. Чаще всего используют два типа пространственного распределения плотности энергии: нормальное (распределение Гаусса) и равномерное. В работе [5] рассмотрен источник нагрева с нормальным распределением теплового потока в пятне нагрева радиусом  $r$ :

$$q_2(r) = q_{2m} \exp(-kr^2),$$

где  $q_2(r)$  – удельный тепловой поток в любой точке пятна нагрева;  $q_{2m}$  – наибольший удельный тепловой поток в центре пятна нагрева;  $k$  – коэффициент сосредоточенности теплового потока.

Принято форму источника с гауссовым распределением воздействия [5, 6] оценивать эффективным диаметром  $d_3$ , при этом на некотором расстоянии  $r_3 = d_3/2$  от центра источника удельный тепловой поток  $q_2(r_3)$  равен 0,05 от наибольшего удельного теплового потока в центре пятна нагрева. После преобразований было получено выражение

$$d_3 = \frac{3,46}{\sqrt{k}}.$$

Для оценки величины коэффициента сосредоточенности в работе [5] предложен фиктивный источник, при котором распределение температуры, вызванное мгновенным действием нормально-кругового источника, рассматривается как распределение температуры от мгновенного сосредоточенного источника, введенного в центре пятна нагрева ранее на  $t_0$ . Использование при анализе тепловых процессов фиктивного источника позволило получить соотношения для определения  $t_0$ :

$$k = \frac{1}{4at_0}, \quad t_0 = \frac{d_3}{48a}, \quad (3)$$

где  $a$  – температуропроводность.

При описании источников с высокой степенью концентрации воздействия широко применяют дельта-функцию Дирака  $\delta(x)$ . С использованием дельта-функции и с учетом принятых условий точечное распределение можно записать как

$$\psi[\xi] = \delta(\xi).$$

Форма многомерного источника во многих случаях может быть выражена в следующем виде:

$$\psi[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2)\dots\psi_n(\xi_n). \quad (4)$$

Математическая модель процессов сварки плавлением может быть получена при решении уравнения (1) с подвижным источником различной формы, соответствующей способу сварки плавлением. В общем виде источник описывается выражением (2), а форма многомерного источника может быть представлена выражением (4).

Рассмотрим многомерный источник

$$F(x, y, z, t) = Q\psi(x)\psi(y)\psi(z)\psi(t),$$

где  $Q$  – эффективная мощность источника.

Если мгновенный точечный источник расположен в центре координат, то его описание с использованием дельта-функции имеет вид

$$F(x, y, z, t) = Q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t),$$

а в случае, если точечный источник перемещается вдоль оси  $X$  со скоростью сварки  $V$ , то

$$F(x, y, z, t) = Q\delta(x - Vt)\delta(y)\delta(z)E(t).$$

На практике форму концентрированного источника тепла, например при электронно-лучевой сварке, можно изменять с помощью специальных устройств путем сканирования электронного пучка по определенным траекториям с высокими скоростями, обычно на 2-3 порядка выше скорости сварки. Например, если электронный пучок осуществляет колебательные движения вдоль оси  $X$  от  $-h$  до  $+h$  с частотой более 50 Гц, то этот источник можно представить в виде суммы множества точечных источников, расположенных на отрезке  $[-h, h]$ . При бесконечно малых расстояниях между точечными источниками знак суммы можно заменить знаком интеграла. Известно, что при интегрировании дельта-функции образуется единичная функция (функция Хевисайда):

$$\int_{-h}^h \delta(x) dx = E(x), \quad E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -h \leq x \leq h, \\ 0 & \text{при } x > h, x < -h'; \end{cases}$$

$$E(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < \tau \leq t, \\ 0 & \text{при } \tau > t. \end{cases}$$

Таким образом, с помощью дельта-функций и единичных функций можно описать практически все тепловые источники, используемые при сварке плавлением с использованием концентрированных источников тепла.

Применительно к электронно-лучевой сварке в случае, если колебания электронного пучка на отрезке  $[-h, h]$  происходят с частотой менее 50 Гц (например, при термической обработке), целесообразно использовать точечный источник, перемещающийся со скоростью обработки  $V$  относительно изделия и одновременно совершающего возвратно-поступательное движение вдоль отрезка  $[-h, h]$  со скоростью  $W$ . Значение скорости  $W$  связано с частотой колебаний  $f$  на участке  $[-h, h]$  и равно  $W = 2hf$ . Математическое описание такого источника имеет вид

$$F(x, y, z, t) = Q\delta\left[x - \left(Vt + 2hft \cdot \text{sign}(\sin(\omega t))\right)\right]\delta(y)\delta(z)E(t).$$

Для случая, когда источник колеблется вдоль оси  $Y$  и одновременно перемещается со скоростью обработки вдоль оси  $X$ , описание источника можно представить выражением

$$F(x, y, z, t) = Q\delta(x - Vt)\delta\left[y - 2hft \cdot \text{sign}(\sin(\omega t))\right]\delta(z).$$

Классификация подвижных источников, перемещающихся по сложным траекториям с поступательным и вращательным движениями, а также средства управления основными параметрами основных типов подвижных источников, подробно рассмотрены в работе [2].

В таблице приведено математическое описание различных сварочных тепловых источников, харак-

терных практически для большинства способов сварки плавлением. Представлены и два тепловых источника применительно к сварке цилиндрических

тел. Используя данную методику, можно, конечно, получить описание и для случаев, не рассмотренных в данной работе.

#### Сварочные тепловые источники и их математическое описание

№ п/п	Форма источников	Наименование и математическое описание
1		<p>Мгновенный точечный источник, введенный в точке с координатами <math>(a, b, c)</math> при <math>t = 0</math></p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{c\rho} \delta(x' - a) \delta(y' - b) \delta(z' - c) \delta(\tau).$ <p>Непрерывно действующий точечный источник, введенный в точке с координатами <math>(0, 0, 0)</math></p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{c\rho} \delta(x') \delta(y') \delta(z') E(\tau)$
2		<p>Непрерывно действующий линейный источник, линейный источник длиной <math>2h_2</math>, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{2h_2 c\rho} E(x') \delta(y') \delta(z') E(\tau)$
3		<p>Непрерывно действующий линейный источник, линейный источник длиной <math>2h_1</math>, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{2h_1 c\rho} E(y') \delta(x') \delta(z') E(\tau)$
4		<p>Непрерывно действующий плоский источник, плоский источник длиной <math>2h_2</math> и шириной <math>2h_1</math>, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{2h_1 2h_2 c\rho} E(x') E(y') \delta(z') E(\tau)$
5		<p>Непрерывно действующий линейный по глубине источник, линейный источник длиной <math>h</math>, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{h c\rho} \delta(y') \delta(x') E(z') E(\tau)$
6		<p>Непрерывно действующий комбинированный источник, линейный по глубине и точечный на поверхности, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{qk_1}{h c\rho} \delta(y') \delta(x') E(z') E(\tau) + \frac{qk_2}{c\rho} \delta(x') \delta(y') \delta(z') E(\tau)$
7		<p>Непрерывно действующий объемный источник, введенный в начале координат</p> $F(x', y', z', \tau) = \frac{q}{4c\rho h_1 h_2 h_3} E(x') E(y') E(z') E(\tau)$
8		<p>Непрерывно действующий комбинированный источник, точечный на поверхности и линейный по глубине</p> $F(\varphi', r', z', \tau) = \frac{q}{h c\rho} \delta(\varphi' - \omega\tau) \delta(r') E(z') E(\tau) + \frac{q}{c\rho} \delta(\varphi' - \omega\tau) \delta(r') \delta(z') E(\tau)$
9		<p>Непрерывно действующий линейный источник (например, наплавка ленточным электродом)</p> $F(\varphi', r', z', \tau) = \frac{q}{2h c\rho} \delta(\varphi' - \omega\tau) \delta(r') \delta(z' - L) E(\tau)$

Для анализа эффективности управления формой источника были выбраны варианты 6 и 7 из приведенной таблицы. Для бесконечной пластины с нулевыми начальным и граничными условиями второго рода функция Грина в декартовой системе координат имеет вид

$$G(x, x', y, y', z, z', t - \tau) = \frac{1}{8\sqrt{\pi a(t - \tau)^3}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{4a(t - \tau)}\right] \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(z - z' + 2nL)^2}{4a(t - \tau)}\right] + \exp\left[-\frac{(z + z' + 2nL)^2}{4a(t - \tau)}\right] \right\}.$$

**Исследование комбинированного источника (электронно-лучевая сварка)**

Применительно к процессу электронно-лучевой сварки для комбинированного источника (см. вариант 6 табл.) выражение для оценки распределения температурных полей принимает вид [7]

$$T(x, y, z, t) = \frac{q\eta k_1}{8c\rho\pi ah} \int_0^t \frac{1}{\tau + t_0} \exp\left[-\frac{[x + V(\tau + t_0)]^2 + y^2}{4a(\tau + t_0)}\right] \times \left\{ \operatorname{erf}\left[\frac{z + h}{2\sqrt{a(\tau + t_0)}}\right] - \operatorname{erf}\left[\frac{z - h}{2\sqrt{a(\tau + t_0)}}\right] \right\} d\tau + \frac{q\eta k_2}{4c\rho\sqrt{\pi a^3}} \times \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau + t_0}} \exp\left[-\frac{[x + V(\tau + t_0)]^2 + y^2 + z^2}{4a(\tau + t_0)}\right] d\tau.$$

Для получения модели распределения температуры при воздействии мгновенного комбинированного источника необходимо убрать интеграл и переменную интегрирования  $\tau$ . Оценка производилась применительно к электронно-лучевой сварке при следующих параметрах электронного пучка: ускоряющее напряжение 60 кВ; ток электронного пучка 50 мА; коэффициент полезного действия 0,95;  $k_1 = 0,8$ . На рис. 1 показано, как изменяется температурное поле в зависимости от диаметров электронного пучка: *a* – диаметр пучка 0,8 мм,  $t_0 = 0,002$  с; *б* – диаметр пучка 0,6 мм,  $t_0 = 0,0012$  с; *в* – диаметр пучка 0,4 мм,  $t_0 = 0,0005$  с. По осям показано количество циклов при расчетах. При каждом цикле по глубине и ширине шва изменения происходят через 0,5 мм.

В приведенном выражении (1)  $h$  является величиной линейного источника и, соответственно, глубиной проплавления. Напрямую определить  $h$  невозможно. Для определения глубины проплавления необходимо учитывать сложные физико-химические процессы, происходящие в канале проплавления. Но, зная из практических опытов глубину проплавления, можно, подставив его значение в формулу (1), оце-

нить распределение температурных полей как в свариваемом изделии, так и во времени.

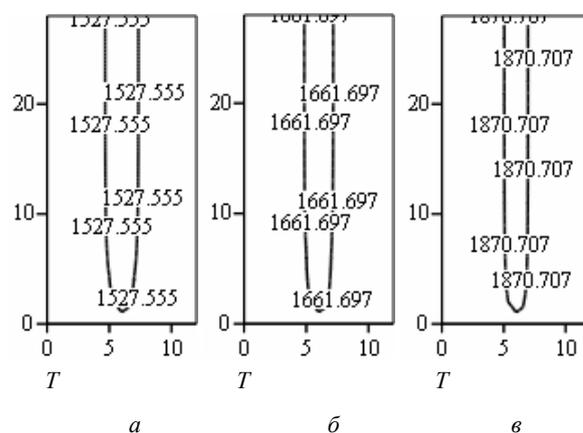


Рис. 1. Изменение температурного поля линейного источника, используемого при электронно-лучевой сварке, в зависимости от диаметра электронного луча и  $t_0$ : *a* – диаметр пучка 0,8 мм,  $t_0 = 0,002$  с; *б* – диаметр пучка 0,6 мм,  $t_0 = 0,0012$  с; *в* – диаметр пучка 0,4 мм,  $t_0 = 0,0005$  с

На рис. 2 приведена расчетная форма шва с заданной глубиной проплавления и экспериментально полученная форма шва. Расчеты производились по выражению (1) при следующих параметрах режима сварки: комбинированный источник «точечный + линейный»,  $t_0 = 0,002$ ; ускоряющее напряжение 60 кВ; ток электронного пучка 0,05 А; скорость сварки 0,005 м/с.

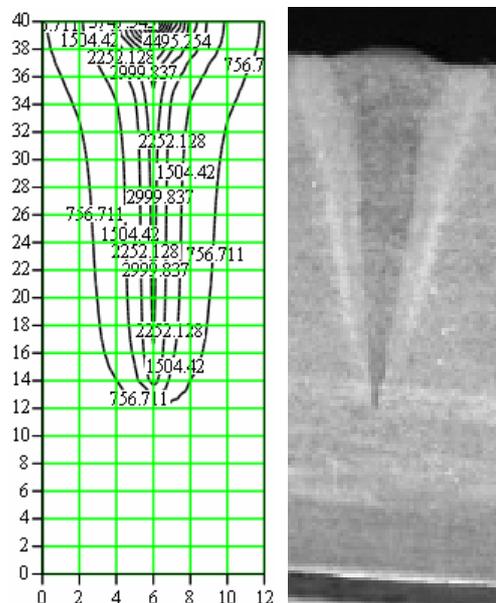


Рис. 2. Поперечное сечение шва при электронно-лучевой сварке: *a* – при моделировании по выражению (1); *б* – при эксперименте

По этой же формуле можно также теоретически оценить максимально возможную глубину проплавления. В этом случае не учитываются сложные физико-химические процессы, происходящие в канале проплавления, а принимаются во внимание лишь

энергетические параметра электронного пучка. Для этого необходимо увеличивать значение  $h$  до тех пор, пока не совпадут заданное  $h$  и полученное на графике. Если чрезмерно увеличить заданную глубину проплавления, то на графике наблюдается снижение глубины проплавления. Расчеты показали, что при указанных выше параметрах электронного пучка теоретически можно получить глубину проплавления около 19 мм. Таким образом, не используются полностью энергетические параметры пучка. Например, еще в работе [8] было показано, что использование импульсного режима позволяет увеличить глубину проплавления на 30-40 %.

#### Выводы

1. Предлагается методика описания сварочных тепловых источников с помощью дельта-функций Дирака и единичных функций Хевисайда на основе общей теории управления системами с распределенными параметрами.

2. Показано, что на основе данной методики можно получить тепловую модель для различных способов сварки плавлением с использованием высококонцентрированных источников тепла. Управляя параметрами теплового сварочного источника

можно получить результаты расчетов, совпадающие с реальными данными с достаточно высокой степенью точности.

#### Библиографические ссылки

1. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М. : Физматлит, 2001. – 506 с.
2. Чубаров Е. П. Управление системами с подвижными источниками воздействия. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 288 с.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1975. – 568 с.
4. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. – М. : Наука, 1979. – 224 с.
5. Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. – М. : Машиностроение, 1951. – 296 с.
6. Ерохин А. А. Основы сварки плавлением. Физико-химические закономерности. – М. : Машиностроение, 1973. – 448 с.
7. Язовских В. М. Математическое моделирование и инженерные методы расчета в сварке : в 2 ч. – Ч. 2. Тепловые процессы при сварке и моделировании в пакете Mathcad. – Пермь : Изд-во ПГТУ, 2008. – 119 с.
8. Лазерная и электронно-лучевая обработка материалов : справочник / Н. Н. Рыкалин [и др.]. – М. : Машиностроение, 1985. – 496 с.

*V. Ya. Belenkiy*, DSc in Engineering, Perm National Research Polytechnic University

*D. N. Trushnikov*, PhD in Engineering, Perm National Research Polytechnic University

*E. S. Salomatova*, Perm National Research Polytechnic University

*V. M. Yazovskikh*, DSc in Engineering, Professor, Perm National Research Polytechnic University

#### Mathematical Description and Analysis of Concentrated Heating Sources

*The mathematical description of concentrated welding heat sources is proposed based on general principles of control systems with distributed parameters. Dirac delta function and Heaviside unit function were applied for mathematical description. Heat sources of different shape are presented, specific for most fusion welding methods with application of concentrated heat sources, and possibilities of their shape variation are analyzed.*

**Key words:** simulation of welding processes, welding concentrated sources, electron beam welding.