

ведена на рис. 2, имеет сложную волновую структуру с выраженной трехмерностью течения, что оправдывает применение трехмерных математических моделей.

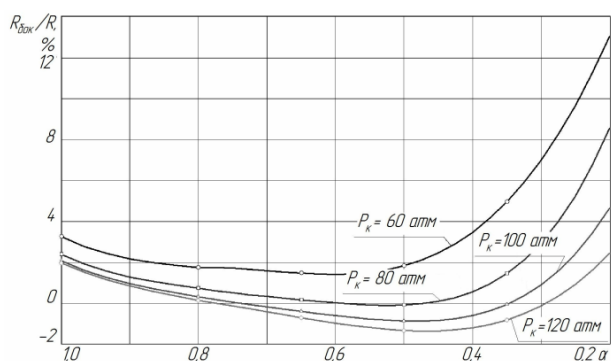


Рис. 6. Изменение относительной боковой силы в зависимости от степени перекрытия сопла: P_k – давление в ресивере согласно схеме на рис. 1; α – степень открытия сопла; $R_{бок}/R$ – относительная сила тяги

Предложенная методика может быть полезна при проектировании и отработке несимметричных сопловых блоков и проточных каналов ракетных двигателей специального назначения, а также при анализе структуры течения продуктов сгорания в соплах и каналах.

Библиографические ссылки

1. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Газовая динамика сопел. – М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. литер., 1990. – 368 с.
2. Ткаченко А. С. Численное исследование тяговых характеристик и структура пространственных течений в соплах // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1981. – № 5. – С. 168–172.
3. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1982. – 391 с.
4. Численный эксперимент в теории РДТТ / А. М. Липанов [и др.]. – Екатеринбург: Наука, 1994. – 302 с.
5. Алиев А. В., Блинов Д. С. Решение газодинамических задач в областях сложной формы с использованием конечно-объемных алгоритмов метода крупных частиц // Вестник ИжГТУ. – 2009. – № 1(41). – С. 151–154.

A. N. Mironov, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

K. V. Sermyagin, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Numerical Investigation of Gas Flow in Asymmetric Nozzle Block

Problems of defining the control forces caused by the gas flow out of the asymmetrical nozzle block are considered. Results of applying the numerical method of gas flow calculation for the asymmetrical nozzle block are presented.

Key words: asymmetric nozzle block, mathematical modeling, control force.

УДК 539.319

М. А. Осипенко, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКОГО ИЗГИБА ДВУХЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПРОФИЛЕМ КОРОТКОГО ЛИСТА

Построено аналитическое решение контактной задачи об изгибе двухлистовой рессоры с параболическим профилем короткого листа и постоянным профилем длинного листа. Установлено, что существуют три возможных варианта картины контакта: контакт в одной точке на конце короткого листа, контакт по всей длине короткого листа и контакт по отрезку короткого листа. Полученное решение позволяет найти напряжения в листах и коэффициент использования материала.

Ключевые слова: двухлистовая рессора, изгиб, параболический профиль, контактная задача, аналитическое решение.

Листовые рессоры широко используются в качестве упругих элементов подвесок автомобилей [1]. Известно также их использование в протезах стопы [2]. Поэтому задачи расчета статического изгиба таких рессор являются актуальными. Несмотря на то, что эти задачи изучаются уже более 150 лет [3], не существует общего метода построения их аналитических решений, а имеется лишь весьма небольшой набор таких решений для отдельных задач [1–8]. Причина в том, что даже при ис-

пользовании простейшей теории изгиба одного листа задача о совместном изгибе листов является контактной; аналитические решения таких задач еще мало изучены.

Целью настоящей статьи является построение аналитического решения задачи изгиба двухлистовой рессоры с коротким листом переменной толщины (параболического профиля) и длинным листом постоянной толщины. Это построение увеличивает вышеупомянутый набор решений и, возможно, явля-

ется одним из шагов к созданию общего метода получения подобных результатов.

Конструкции рессор такого рода известны в технике (см. рис. 1, [9], где показана четырехлистная рессора с двумя длинными (коренными) и двумя короткими (подкоренными) листами; профили коротких листов выбираются с целью максимального приближения к труднодостижимому технологически параболическому профилю).

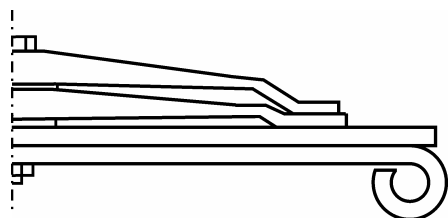


Рис. 1. Четырехлистная комбинированная рессора

Построенное решение контактной задачи об изгибе рессоры позволяет найти напряжения в листах и коэффициент использования материала рессоры [10]. Показано, что максимальное значение напряжения может достигаться не в точке заделки листов, а максимальное значение коэффициента использования материала достигается при отбрасывании листа постоянной толщины.

Постановка задачи

Модель рессоры и постановка контактной задачи соответствуют схеме, принятой в [6, 7]. Каждый лист представляет собой консольно закрепленную прямолинейную балку Бернулли – Эйлера, испытывающую слабый (линейный) изгиб в одной плоскости (рис. 2). Сечения листов являются прямоугольниками одинаковой постоянной ширины w , но с различными высотами (толщинами): $h_1(x) \equiv h_1$, $h_2(x) = h_{20} \sqrt{1-x/L_2}$ (параболический профиль). В отсутствие нагрузки листы плотно прилегают друг к другу (трением пренебрегаем). Задача заключается в отыскании линий изгиба листов $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Согласно теории Бернулли – Эйлера изгиба балок [11]

$$\begin{aligned} y_1(x) &= FG_1(x, L_1) - \int_0^{L_2} G_1(x, s)q(s)ds, \\ y_2(x) &= \int_0^{L_2} G_2(x, s)q(s)ds, \end{aligned} \tag{1}$$

где $q(x)$ – плотность сил взаимодействия листов;

$$G_k(x, s) = \frac{12}{Ewh_k^3(0)} \begin{cases} xA_k(s) - B_k(s) & (x \geq s), \\ sA_k(x) - B_k(x) & (x < s), \end{cases} \tag{2}$$

$$A_k(\eta) = \int_0^\eta (\eta - x) \left(\frac{h_k(0)}{h_k(x)} \right)^3 dx, \tag{3}$$

$$B_k(\eta) = \int_0^\eta x(\eta - x) \left(\frac{h_k(0)}{h_k(x)} \right)^3 dx, \tag{4}$$

E – модуль Юнга. Для указанных выше $h_k(x)$ из (3), (4) находим:

$$A_1(\eta) = \eta^2/2; \quad B_1(\eta) = \eta^3/6; \tag{5}$$

$$A_2(\eta) = 2L_2^2 \left(1 - \sqrt{1 - \eta/L_2} \right)^2;$$

$$B_2(\eta) = \left(4L_2^3/3 \right) \left(1 - \sqrt{1 - \eta/L_2} \right)^3. \tag{6}$$

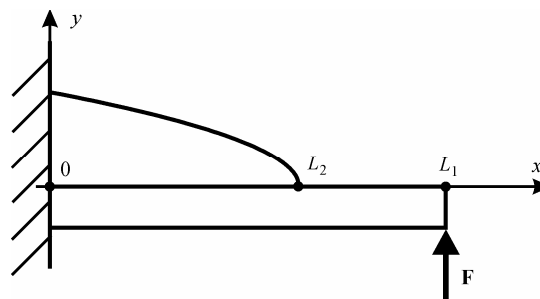


Рис. 2. Модель двухлистной комбинированной рессоры: $L_1 \geq L_2$ – длины листов; сила F – нагрузка, сосредоточенная на свободном конце длинного листа

Рассматриваемая задача сводится, таким образом, к отысканию $q(x)$. Будем считать, что эта функция имеет следующий вид:

$$q(x) = p(x) + \sum_i P_i \delta(x - x_i). \tag{7}$$

Здесь $p(x) \geq 0$ кусочно-непрерывна и непрерывна справа при $0 \leq x < L_2$. Значение $p(L_2)$ несущественно, оно может равняться $+\infty$, но интеграл $\int_0^{L_2} p(x)dx$ должен сходиться; $P_i \geq 0$; $0 < x_i \leq L_2$; сумма конечна; δ – дельта-функция Дирака. Обозначим $r(x) = y_2(x) - y_1(x)$ (расстояние между листами). Из (1) следует, что

$$r(x) = \int_0^{L_2} (G_1(x, s) + G_2(x, s))q(s)ds - FG_1(x, L_1). \tag{8}$$

Условие контакта листов состоит (помимо неотрицательности плотности сил взаимодействия) в том, что расстояние между листами неотрицательно, а в тех точках, где плотность сил взаимодействия положительна, равно нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

Задача. Найти функцию $q(x)$ вида (7) такую, что при $0 \leq x \leq L_2$

$$r(x) \begin{cases} = 0 & (q(x) > 0), \\ \geq 0 & (q(x) = 0), \end{cases} \tag{9}$$

где $r(x)$ выражается формулой (8).

Утверждение 1. Поставленная задача может иметь только одно решение.

Доказательство аналогично доказательствам единственности в [6, 7] и поэтому здесь не приводится. Заметим только, что в [6, 7] (в отличие от рассматриваемой задачи) не допускаются обращение

толщины листа в нуль и плотности сил взаимодействия в бесконечность, но снятие этих ограничений не приводит к существенным изменениям в схеме доказательства.

Решение задачи
Обозначим

$$\alpha = L_1/L_2 - 1; \quad \beta = (h_1/h_{20})^3; \quad \xi = \sqrt{1-x/L_2},$$

тогда $\alpha \geq 0, \beta > 0, 0 \leq \xi \leq 1$ (при $0 \leq x \leq L_2$).

Утверждение 2. Решение поставленной задачи имеет следующий вид:

а) Если $\beta \leq \alpha/(4+4\alpha)$, то

$$q(x) = P\delta(x-L_2) \tag{10}$$

(контакт в одной точке на конце короткого листа), где

$$P = F(2+3\alpha)/(2+4\beta). \tag{11}$$

б) Если $\beta \geq (1+5\alpha)/(5+\alpha)$, то $q(x) = \tilde{q}(x)$, где

$$\tilde{q}(x) = \frac{3F\beta(\beta(\alpha+5\xi^2) - \xi^3(5\alpha+\xi^2))}{4L_2\xi(\beta+\xi^3)^3} \tag{12}$$

(контакт по всей длине короткого листа).

в) Если $\alpha/(4+4\alpha) < \beta < (1+5\alpha)/(5+\alpha)$, то

$$q(x) = Q\delta(x-L) + \begin{cases} 0 & (0 \leq x < L), \\ \tilde{q}(x) & (L \leq x < L_2) \end{cases} \tag{13}$$

(контакт по части короткого листа), где

$$L = L_2(1-\lambda^2), \quad 0 < \lambda < 1 \text{ – корень уравнения}$$

$$\Phi(\lambda) = 0, \tag{14}$$

$$\Phi(\lambda) = (1+\lambda)^2(\alpha(1+4\lambda)+\lambda^2) - 4\beta(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2), \tag{15}$$

$$Q = \frac{F\beta(1-\lambda)^2(1+2\lambda)(\alpha+\lambda^2)(1+2\alpha+2(1+2\alpha)\lambda+3\lambda^2)}{4(\beta+\lambda^3)^2(4\beta+(1+\lambda)^2)(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2)}. \tag{16}$$

Доказательство

а) Очевидно, что $q(x)$ имеет вид (7). Подставляя (10) в (8), найдем с учетом (11), (2), (5), (6):

$$r(x) = \frac{12FL_2^3}{Ewh_1^3} \cdot \frac{(1-\xi^2)^2\xi^2}{1+2\beta} \times (\alpha/4 - \beta(1+\alpha) + (\beta/3)(2+3\alpha)(1-(1+\xi)^{-2})).$$

Несложное исследование этого выражения показывает, что если $\beta \leq \alpha/(4+4\alpha)$, то $r(x) \geq 0$ при

$0 \leq x \leq L_2$. Далее $q(x) > 0$ только при $x = L_2$, а $r(L_2) = 0$. Таким образом, (9) выполнено.

б) Несложное исследование выражения (12) показывает, что если $\beta \geq (1+5\alpha)/(5+\alpha)$, то $q(x) \geq 0$ при $0 \leq x < L_2$; $q(L_2) = +\infty$; интеграл $\int_0^{L_2} q(x)dx$ сходится. Следовательно, $q(x)$ имеет вид (7). Подставляя $q(x) = \tilde{q}(x)$ в (8), найдем с учетом (12), (2), (5), (6), что $r(x) = 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Таким образом, (9) выполнено.

в) Так как $\alpha/(4+4\alpha) < (1+5\alpha)/(5+\alpha)$, то данный случай возможен. Существование корня $0 < \lambda < 1$ следует из непрерывности $\Phi(\lambda)$ при $0 \leq \lambda \leq 1$ и значений

$$\Phi(0) = \alpha - 4\beta(1+\alpha) < 0;$$

$$\Phi(1) = 4(1+5\alpha) - 4\beta(5+\alpha) > 0.$$

Единственность корня следует из утверждения 1 (ее нетрудно установить и непосредственно). Очевидно, что $Q > 0$; далее, используя (15), выразим β из равенства $\Phi(\lambda) = 0$ и подставим это выражение для β в (12), положив $x = L$ (тогда $\xi = \lambda$); после преобразований получим:

$$\tilde{q}(L) = \frac{3F\beta(1-\lambda)(\alpha+\lambda^2)}{16L_2\lambda(\beta+\lambda^3)^3(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2)} \times \frac{(\alpha(1+7\lambda+16\lambda^2)+\lambda^2(5+11\lambda+8\lambda^2))}{16L_2\lambda(\beta+\lambda^3)^3(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2)} > 0.$$

Несложное исследование выражения (12) показывает, что если $\tilde{q}(x_*) > 0$ при некотором $0 < x_* < L_2$, то $\tilde{q}(x) > 0$ при всех $x_* \leq x < L_2$. Таким образом, $q(x) > 0$ при $L \leq x < L_2$. Наконец, $q(L_2) = +\infty$, и интеграл $\int_0^{L_2} q(x)dx$ сходится. Следовательно, $q(x)$ имеет вид (7). Далее, подставляя (13) в (8), найдем с учетом (14)–(16), (2), (5), (6), что

$$r(x) = \begin{cases} \tilde{r}(x) & (0 \leq x \leq L), \\ 0 & (L \leq x \leq L_2), \end{cases}$$

где

$$\tilde{r}(x) = \frac{2L_2^3 F \gamma}{Ewh_1^3} (1-\xi)^2 (\xi-\lambda)^3 (\xi+2+3\lambda);$$

$$\gamma = \frac{\beta(1+6\lambda+9\lambda^2+8\lambda^3)}{4(\beta+\lambda^3)^2(4\beta+(1+\lambda)^2)(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2)^2} \times \frac{(1+2\alpha+2(1+2\alpha)\lambda+3\lambda^2)(\alpha+\lambda^2)^2}{4(\beta+\lambda^3)^2(4\beta+(1+\lambda)^2)(1+\alpha+2\lambda+2\lambda^2)^2}. \tag{17}$$

Следовательно, $r(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq L_2$. Так как $q(x) > 0$ только при $L \leq x \leq L_2$, а $r(x) = 0$ при этих x , то, окончательно, (9) выполнено.

Некоторые приложения полученного решения

Построенное решение контактной задачи дает возможность найти аналитические выражения для напряжений $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ в листах рессоры (единственная существенная компонента σ_{xx} тензора напряжений на нижней поверхности листа). В рамках теории Бернулли – Эйлера [11]

$$\sigma_k(x) = \frac{6}{wh_k^2(x)} \int_x^{L_k} (s-x)q_k(s)ds, \quad (18)$$

где $q_k(x)$ – плотность нагрузки, действующей на лист номер k . Из (13)–(18) получаем, например, для случая (с):

$$\sigma_1(x) = \frac{6FL_2}{wh_1^2} \times$$

$$\begin{cases} \beta(\alpha + \lambda^2)/(\beta + \lambda^3) - \gamma(\xi^2 - \lambda^2) & (0 \leq x \leq L), \\ \beta(\alpha + \xi^2)/(\beta + \xi^3) & (L \leq x \leq L_2), \\ \alpha + \xi^2 & (L_2 \leq x \leq L_1); \end{cases}$$

$$\sigma_2(x) = \frac{6FL_2\beta^{2/3}}{wh_1^2} \times$$

$$\begin{cases} \lambda^2(\lambda(\alpha + \lambda^2)/(\beta + \lambda^3) - \gamma - 1)/\xi^2 + \gamma + 1 & (0 \leq x \leq L), \\ \xi(\alpha + \xi^2)/(\beta + \xi^3) & (L \leq x \leq L_2). \end{cases}$$

На рис. 3 приведены графики функций $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ для следующих численных значений параметров рессоры (отвечающих случаю (с)): $L_1 = 600$ мм, $L_2 = 300$ мм, $h_1 = 11$ мм, $h_{20} = 15$ мм, $w = 45$ мм, $F = 2000$ Н. Эти графики показывают, что максимальное значение напряжения в рессоре достигается не в точке заделки листов (как это обычно предполагается [12]). Следует также заметить, что второй лист не является равнонапряженным, несмотря на параболический профиль.

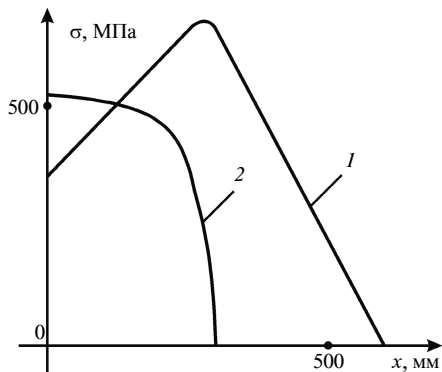


Рис. 3. Напряжения в листах рессоры

Построенное решение контактной задачи дает также возможность вычислить применяемый в те-

рии рессор коэффициент использования материала [10]. Хотя, как показано в [10], он не всегда действительно характеризует степень использования материала, его вычисление представляет интерес. Здесь удобно воспользоваться следующим выражением [10] для этого коэффициента:

$$T = \sum_{k=1}^2 V_k \langle \sigma^2 \rangle_k / ((V_1 + V_2) \sigma_{\max}^2), \quad (19)$$

где V_k – объем листа номер k ;

$$\langle \sigma^2 \rangle_k = \frac{w}{3V_k} \int_0^{L_k} \sigma_k^2(x) h_k(x) dx \quad (20)$$

есть средний по объему листа квадрат напряжения (σ_{xx});

$$\sigma_{\max} = \max \left(\max_{0 \leq x \leq L_1} |\sigma_1(x)|, \max_{0 \leq x \leq L_2} |\sigma_2(x)| \right). \quad (21)$$

На рис. 4 приведен график функции $T(\alpha, \beta)$, построенный (численно) с использованием формул (10)–(21). График показывает, что в области ($\alpha \geq 0, \beta > 0$) максимум T не достигается; точная верхняя грань T равна $1/3$ и достигается при $\alpha = 0, \beta \rightarrow 0$, то есть при отбрасывании листа постоянной толщины. Последний результат является элементарным и может быть получен без детального решения рассмотренной контактной задачи.

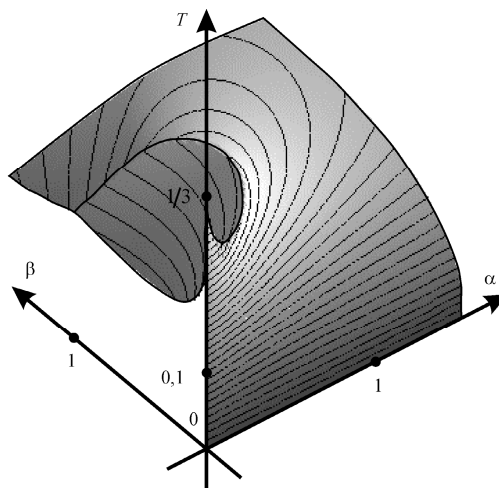


Рис. 4. Зависимость коэффициента использования материала от параметров рессоры

Выводы

Аналитическое решение задачи об изгибе даже простейшей листовой рессоры нетривиально, так как задача является контактной. Общего метода построения таких решений в настоящее время не имеется – каждая задача решается особо. Искомой величиной при этом удобно считать плотность сил взаимодействия листов. После ее отыскания нетрудно найти другие характеристики рессоры, например, напряжения в листах и коэффициент использования материала.

Автор выражает благодарность ведущему инженеру ОАО «Чусовской металлургической завод» Н. Ф. Таланцеву за полезные обсуждения.

Библиографические ссылки

1. Пархиловский И. Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
2. Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending / М. А. Osipenko [etc.] // Russian Journal of Biomechanics. – 2001. – Vol. 5. – No. 2. – P. 18–29.
3. Глух Б. А. Бидерман В. Л. Рессоры листовые // Машиностроение. Энциклопедический справочник. – Т. 2. – М.: Машгиз, 1948. – С. 723–739.
4. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – Т. 1. – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.
5. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
6. Няшин Ю. И., Осипенко М. А., Рудаков Р. Н. К теории изгиба листовой рессоры. – Изв. РАН МТГ. – 2002. – № 6. – С. 134–143.

7. Osipenko M. A., Yu. I. Nyashin, R. N. Rudakov. A contact problem in the theory of leaf spring bending // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – No. 40. – P. 3129–3136.

8. Осипенко М. А., Брынских С. И. Отыскание толщин листов равнонапряженных листовых рессор // Вычислительная механика: Сб. науч. тр. – № 2. – Пермь, 2004. – С. 51–54.

9. Заявка на изобретение РФ. Комбинированная листовая рессора / И. Н. Губайдуллин, Н. Ф. Таланцев, В. Н. Езубченко, Т. И. Морозова. № 94028498/28; заявл. 28.07.1994; опубл. 20.03.1996.

10. Осипенко М. А., Таланцев Н. Ф. О свойствах коэффициента использования материала листовой рессоры // Изв. вузов. Поволжский регион. – 2009. – № 2(10). – С. 134–144.

11. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 711 с.

12. ГОСТ Р 51585–2000. Рессоры листовые автомобильных транспортных средств. – М.: Изд-во стандартов, 2000. – 19 с.

M. A. Osipenko, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University

Analytical Calculation of Static Bending of Two-Leaf Spring with the Parabolic Profile of the Short Leaf

The analytical solution of the contact problem for two-leaf spring bending is obtained. The long leaf has the constant profile, while the short leaf has the parabolic profile. Three possible contact patterns are found out: the contact at one point at the tip of the short leaf, the contact along the whole short leaf, the contact along the short leaf segment. The obtained solution allows calculating the bending stresses at leaves and the material utilization coefficient.

Key words: two-leaf spring, bending, parabolic profile, contact problem, analytical solution.

УДК 544.4: 519.6: 538.971/971.3: 542.971

А. В. Мышлявцев, доктор химических наук, Омский государственный технический университет

М. Д. Мышлявцева, кандидат физико-математических наук, доцент, Омский государственный технический университет

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ТИПА РЕШЕТКИ НА АВТОКОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ РЕАКЦИИ, ПРОТЕКАЮЩЕЙ ПО МЕХАНИЗМУ ЛЕНГМЮРА – ХИНШЕЛЬВУДА

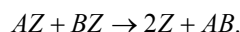
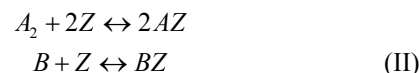
Изучено влияние латеральных взаимодействий между адсорбированными частицами и обратимости мономолекулярной адсорбции на автоколебания скорости реакции, протекающей по механизму Ленгмюра – Хиншельвуда, в случае треугольной решетки. В качестве модели адсорбционного слоя выбрана модель решеточного газа. Для вычисления правых частей кинетических уравнений использован метод трансфер-матрицы. Проведен анализ влияния типа решетки (квадратная, шестиугольная, треугольная) на возможность автоколебаний. Показано, что результаты, полученные для треугольной решетки, в целом аналогичны результатам для квадратной и шестиугольной решеток. Для трех типов решетки показана связь автоколебаний скорости реакции, возникающих как результат бифуркации Андронова – Хопфа, с упорядоченной плотной фазой.

Ключевые слова: латеральные взаимодействия, адсорбция, автоколебания, метод трансфер-матрицы.

Критические явления в гетерогенно-каталитических системах привлекают внимание исследователей с момента их экспериментального обнаружения в начале 70-х годов XX века [1–3]. Простейшим примером может служить реакция с суммарным стехиометрическим уравнением



протекающая по стандартному механизму Ленгмюра – Хиншельвуда [1, 4]



Здесь AZ , BZ – вещества на поверхности катализатора Z ; A_2 , B , AB – вещества в газовой фазе. Механизм Ленгмюра – Хиншельвуда (ЛХ) в первом приближении описывает окисление CO на поверхности металлов платиновой группы (Pt, Pd) и даже в случае иде-