МАТЕМАТИКА

УДК 517.988

Е. Ю. Еленская, Пермский государственный университет

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК НЕПРЕРЫВНЫХ СЛЕВА ИЛИ НЕПРЕРЫВНЫХ СПРАВА ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ПРАВИЛЬНЫМ КОНУСОМ

Доказаны новые достаточные условия существования неподвижной точки оператора, который может быть разрывным. Полученная теорема посредством использования правильных конусов применена для доказательства существования неподвижной точки нелинейного интегрального оператора.

Ключевые слова: непрерывный слева (справа) оператор, конус в банаховом пространстве, неподвижная точка оператора.

Будем использовать понятия конуса, полуупорядоченности и др., изложенные в работе [1].

Пусть X – вещественное банахово пространство; K – конус в X; $\leq$ – полуупорядоченность, порожденная конусом K; $M \subset X$.

Оператор $A: M \to X$ будем называть непрерывным слева (справа) в точке $x \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset M$, $x_n \to x$, $x_n \leq x$ ($x_n \geq x$) $\forall n \in N$ выполняется условие $Ax_n \to Ax$.

Напомним, что конусным отрезком называется множество вида $<u,v> = \{x \in X : u \leq x \leq v\}$, где u, v – фиксированные элементы из X.

Теорема 1. Пусть

1) X – вещественное банахово пространство, K – конус в X, $\leq$ – полуупорядоченность, порожденная конусом K;

2) $<u,v>$ – конусный отрезок в X, $A: <u,v> \to X$, $Au \geq u$, $Av \leq v$;

3) оператор A монотонен и непрерывен слева или справа на $<u,v>$.

Тогда существует хотя бы одна неподвижная точка оператора A на $<u,v>$.

Доказательство для оператора, непрерывного слева, изложено в работе [2]. Для оператора, непрерывного справа, доказательство аналогично.

Рассмотрим правильный конус вида, который впервые использовался в работах [3, 4]. Пусть $\varphi : X \to R$ – линейный непрерывный функционал. Рассмотрим конусы вида

$$K(\varphi,\beta) = \{x \in X : \varphi(x) \geq \beta\|x\|\},$$

где $\beta > 0$ – числовая константа.

Очевидно, функционал φ равномерно положителен, поэтому конусы $K(\varphi,\beta)$ правильны. В дальнейшем полуупорядоченность, порожденную конусом $K(\varphi,\beta)$, будем обозначать $\leq_\beta^\varphi$.

Пусть Ω – компакт в R^j, $C(\Omega)$ – пространство непрерывных на Ω функций. Наиболее известный конус K неотрицательных функций пространства $C(\Omega)$ нам не подходит, так как он не является правильным. Поэтому будем рассматривать конусы $K(\varphi,\beta)$ в $C(\Omega)$, где $\varphi(x) = \int_\Omega x(t)dt.$

В дальнейшем нам будет полезна теорема о сравнении элементов пространства $C(\Omega)$ по полуупорядоченности $\leq_\beta^\varphi$.

Теорема 2. Пусть

1) $\varphi : C(\Omega) \to R$, φ – линейный непрерывный функционал, $\|\varphi\| \neq 0$, $\varphi(x) \geq 0$ при $x \in K$ (K – конус неотрицательных функций);

2) $x, y \in C(\Omega)$, $x \neq y$, $x(t) \leq y(t)$ ($t \in \Omega$), $y - x \notin Ker\varphi$.

Тогда существует такое число $\beta > 0$, что $x \leq_\beta^\varphi y$.

Доказательство. Очевидно, $y - x \in K$, $\varphi(y-x) \neq 0 \Rightarrow \varphi(y-x) > 0$. Тогда $\varphi(y-x) = = \dfrac{\varphi(y-x)}{\|y-x\|}\|y-x\|$.

Положим $\beta = \dfrac{\varphi(y-x)}{\|y-x\|}$. Тогда $\varphi(y-x) = \beta\|y-x\|$, откуда следует, что $y - x \in K(\varphi,\beta)$, т. е. $x \leq_\beta^\varphi y$. Теорема доказана.

Докажем теперь теорему существования неподвижных точек нелинейного интегрального оператора Гаммерштейна, определенного равенством

$$(Ax)(t) = \int_\Omega k(t,s) f(x(s))ds \ \ (t \in \Omega). \quad (1)$$

Теорема 3. Пусть

1) Ω – компакт в R^j, $k : \Omega \times \Omega \to R$, k непрерывна, $k(t,s)$ не равна тождественно нулю, сущест-

Получено 21.07.11

вует такое число $\beta_0 > 0$, что $\int_\Omega k(t,s)dt \ge \beta_0 k(t,s)$ ($t, s \in \Omega$);

2) существуют такие $t_0 \in \Omega$ и окрестность U точки t_0, что $\int_U k(t_0,s)ds > 0$;

3) $f:[0:+\infty) \to [0;+\infty)$, не убывает, непрерывна слева (или справа) на $[0;+\infty)$;

4) $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ при $x \to +0$, $\frac{f(x)}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Тогда существует хотя бы одна ненулевая неподвижная точка оператора A, определенного равенством (1), в пространстве $C(\Omega)$.

Доказательство. Пусть K – конус неотрицательных функций пространства $C(\Omega)$, $\varphi(x) = \int_\Omega x(t)dt$ ($x \in C(\Omega)$). Построим такой конусный отрезок $< u, v > \in K$, что для оператора A, определенного равенством (1), выполнены все условия теоремы 1.

Представим оператор A в виде композиции $A = LF$, где L – линейный интегральный оператор $(Lx)(t) = \int_\Omega k(t,s)x(s)ds$ ($t \in \Omega$), F – оператор суперпозиции, $(Fx)(t) = f(x(s))$ ($s \in \Omega$). Так как *f* не убывает, то для любого $a \in R$ множество $f^{-1}(a;+\infty)$ есть множество вида $(b;+\infty)$, $[b;+\infty)$ или Ø, т. е. борелевское множество. Поэтому *f* измерима по Борелю.

Возьмем произвольную функцию $x \in K$. Тогда *x* измерима и ограничена. Отсюда следует измеримость функции *Fx*, так как она является композицией борелевской функции *f* и измеримой функции *x*. Кроме того, *Fx*, очевидно, ограничена. Отсюда вытекает непрерывность функции $Ax = LFx$. Очевидно, $(Ax)(t) \ge 0$ ($\forall t \in \Omega$), поэтому $Ax \in K$. Итак, $A: K \to K$.

Так как k непрерывна, то существует такая окрестность $U_0 \subset U$ точки t_0 и число c_0, что $\int_{U_0} k(t,s)ds \ge c_0$ ($\forall t \in U_0$).

Возьмем радиус окрестности U_0 строго меньше радиуса окрестности U. Тогда $\bar{U}_0 \cap (\Omega \setminus U) = \varnothing$. Построим функции $x_\lambda : \Omega \to R$ при $\lambda > 0$, которые удовлетворяют условиям: $x_\lambda(s) = \lambda$ при $s \in U_0$; $0 \le x_\lambda(s) \le \lambda$ при $s \in U \setminus U_0$; $x_\lambda(s) = 0$ при $s \in \Omega \setminus U$; x_λ непрерывны на Ω. Существование таких функций вытекает из теоремы Урысона, изложенной, например, в работе [5, с. 33]. Так как, очевидно, все $x_\lambda \in K$, то $Ax_\lambda \in K$.

Пусть $t \in \Omega$. Тогда $(Ax_\lambda)(t) = \int_\Omega k(t,s) f(x_\lambda(s))ds \ge$ $\ge \int_{U_0} k(t,s) f(x_\lambda(s))ds = \int_{u_0} k(t,s) f(\lambda)ds \ge f(\lambda)c_0 =$ $= \frac{f(\lambda)}{\lambda} c_0 \lambda \ge \frac{f(\lambda)}{\lambda} c_0 x_\lambda(t)$ ($\forall t \in \Omega$). Из условия 4) теоремы следует существование такого $\lambda_0 > 0$, что $\frac{f(\lambda_0)}{\lambda_0} > \frac{1}{c_0}$. Тогда $(Ax_{\lambda_0})(t) > x_{\lambda_0}(t)$ ($\forall t \in \Omega$). Введем обозначение $u = x_{\lambda_0}$. Тогда $(Au)(t) > u(t)$ ($\forall t \in \Omega$). По теореме 2 существует такое $\beta_1 > 0$, что $Au \ge^{\varphi}_{\beta_1} u$.

Рассмотрим теперь функции z_η при $\eta > 0$, определенные так: $z_\eta(s) = \eta$ ($\forall s \in \Omega$). Из условий 4) теоремы легко получается существование такого $\eta_0 > \lambda_0$, что $(Az_{\eta_0})(t) < z_{\eta_0}(t)$ ($\forall t \in \Omega$). Введем обозначение $v = z_{\eta_0}$. Тогда $(Av)(t) < v(t)$ ($\forall t \in \Omega$). По теореме 2 существует такое $\beta_2 > 0$, что $Av \le^{\kappa}_{\beta_2} v$. Так как $u(t) < v(t)$ ($\forall t \in \Omega$), то по теореме 2 существует такое $\beta_3 > 0$, что $u \le^{\varphi}_{\beta_3} v$.

Возьмем теперь $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Тогда $Au \ge^{\varphi}_{\beta} u$, $Av \le^{\varphi}_{\beta} v$, $u \le^{\varphi}_{\beta} v$. Кроме того, из условий теоремы следует, что оператор A монотонен на $< u, v >$ и непрерывен на нем слева или справа. Для оператора A на $< u, v >$ выполнены все условия теоремы 1. Поэтому оператор A имеет хотя бы одну неподвижную точку на $< u, v > \subset C(\Omega)$. Эта неподвижная точка ненулевая. Теорема доказана.

К интегральным уравнениям вида $x = Ax$, где A – оператор, определенный равенством (1), сводятся некоторые краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Если для оператора A выполняются условия теоремы 3, то интегральное уравнение и, следовательно, краевая задача будут иметь хотя бы одно решение в пространстве непрерывных функций. Более того, решение можно найти методом последовательных приближений. Сходимость соответствующей последовательности вытекает из доказательства теоремы 1.

Библиографические ссылки

1. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М. : Физматгиз, 1962. – 396 с.

2. *Еленская Е. Ю.* Существование неподвижных точек непрерывных слева монотонных операторов в пространствах с правильным конусом // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 10. – С. 40–47.

3. *Еленский Ю. Н.* О существовании ненулевых положительных решений интегральных уравнений // Ученые записки Перм. ун-та. – 1969. – № 218.

4. *Еленский Ю. Н.* О существовании ненулевых неподвижных точек интегральных операторов // Ученые записки Перм. ун-та. – 1974. – № 309.

5. *Мисюркеев И. В.* Введение в нелинейный функциональный анализ. – Пермь, 1968. – 308 с.

E. Yu. Elenskaya, Perm State University

Fixed Point Existence for Left-Continuous or Right-Continuous Operators in Spaces with a Regular Cone

A theorem with sufficient conditions for the existence of a fixed point of an operator which is not necessarily continuous is proved. The obtained theorem with the use of regular cones is applied for proving the existence of a fixed point of a nonlinear integral operator.

Key words: left-continuous (right-continuous) operator, cone in a Banach space, fixed point of an operator.

УДК 519.83

М. А. Севодин, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский государственный технический университет

РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ С НЕПРЕРЫВНОЙ α-ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

Работа посвящена исследованию антагонистической игры с непрерывной α-выпуклой функцией выигрыша. Построено одно из возможных обобщений выпуклых функций – α-выпуклые функции. Установлено, что игры с α-выпуклой функцией выигрыша можно решать по такой же схеме, что и выпуклые игры.

Ключевые слова: выпуклые функции, непрерывные игры, смешанные стратегии.

В данной статье рассматриваются непрерывные на единичном квадрате антагонистические игры (см., например, [1–3]), т. е. системы вида $\Gamma = \langle X, Y, H\rangle$, где $X = Y = [0,1]$ – множество стратегий игроков I и II; $H: X \times Y \to R$ – непрерывная функция выигрыша игрока I (проигрыша игрока II). Обычно смешанными стратегиями игроков в Γ считаются вероятностные распределения на множествах их чистых стратегий *X* и *Y*, которые являются стохастически независимыми. Множество всех смешанных стратегий игроков мы обозначим через *D*.

Пусть *F* и *G* – смешанные стратегии, соответственно, игроков I и II в игре Γ. Выигрыши $H(F, y)$, $H(x, G)$ и $H(F, G)$ представляют собой математические ожидания

$$H(F,y) = \int_0^1 H(x,y)\,dF(x);$$

$$H(x,G) = \int_0^1 H(x,y)\,dG(y);$$

$$H(F,G) = \int_0^1 H(x,G)\,dF(x) =$$

$$= \int_0^1 H(F,y)\,dG(y) = \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dF(x)\,dG(y),$$

причем интегралы в этих равенствах понимаются в смысле Стилтьеса.

Решением такой игры является тройка (F^*, G^*, υ), где υ – цена игры [1], а для оптимальных смешанных стратегий F^*, $F^* \in D$, и G^*, $G^* \in D$, с любыми смешанными стратегиями *F* и *G*, соответственно, игроков I и II должны выполняться неравенства

$$H(F, G^*) \le H(F^*, G^*) \le H(F^*, G). \qquad (1)$$

Известно [1–3], что решение приведенной игры существует, но никаких общих методов для точного нахождения решений непрерывных антагонистических игр пока не найдено. Однако если функция выигрыша $H(F,G)$ имеет некоторые специфические свойства, то решения рассматриваемых игр можно получать в явном виде. Один из таких классов функций выигрыша составляют выпуклые функции [4]. В настоящей работе обобщается понятие выпуклости и выделяется класс функций выигрыша так, что для игр с такими функциями также удается построить решение в явном виде.

α-выпуклые функции

Зафиксируем некоторое число α, $\alpha \in (0, \pi/2)$, и сделаем следующее определение.

Вещественная функция φ, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, называется α-выпуклой, если для любых $z', z'' \in [a,b]$ таких, что

$$\left|\frac{\varphi\ (z'') - \varphi\ (z')}{z'' - z'}\right| \le \operatorname{tg}\alpha, \qquad (2)$$

и для любого $\lambda \in [0,1]$ следует неравенство

$$\varphi(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \le \lambda\varphi(z') + (1-\lambda)\varphi(z''). \qquad (3)$$

Геометрически принадлежность функции φ классу α-выпуклых функций соответствует следующему: либо всякая дуга графика такой функции не поднимается выше стягивающей ее хорды, если хорда от-

Получено 08.08.11