E. Yu. Elenskaya, Perm State University

Fixed Point Existence for Left-Continuous or Right-Continuous Operators in Spaces with a Regular Cone

A theorem with sufficient conditions for the existence of a fixed point of an operator which is not necessarily continuous is proved. The obtained theorem with the use of regular cones is applied for proving the existence of a fixed point of a nonlinear integral operator.

Key words: left-continuous (right-continuous) operator, cone in a Banach space, fixed point of an operator.

УДК 519.83

М. А. Севодин, кандидат физико-математических наук, доцент, Пермский государственный технический университет

РЕШЕНИЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ С НЕПРЕРЫВНОЙ α-ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ ВЫИГРЫША

Работа посвящена исследованию антагонистической игры с непрерывной α-выпуклой функцией выигрыша. Построено одно из возможных обобщений выпуклых функций – α-выпуклые функции. Установлено, что игры с α-выпуклой функцией выигрыша можно решать по такой же схеме, что и выпуклые игры.

Ключевые слова: выпуклые функции, непрерывные игры, смешанные стратегии.

В данной статье рассматриваются непрерывные на единичном квадрате антагонистические игры (см., например, [1–3]), т. е. системы вида $\Gamma = \langle X, Y, H \rangle$, где $X = Y = [0,1]$ – множество стратегий игроков I и II; $H : X \times Y \to R$ – непрерывная функция выигрыша игрока I (проигрыша игрока II). Обычно смешанными стратегиями игроков в Γ считаются вероятностные распределения на множествах их чистых стратегий *X* и *Y*, которые являются стохастически независимыми. Множество всех смешанных стратегий игроков мы обозначим через *D*.

Пусть *F* и *G* – смешанные стратегии, соответственно, игроков I и II в игре Г. Выигрыши $H(F, y)$, $H(x, G)$ и $H(F, G)$ представляют собой математические ожидания

$$H(F,y) = \int_0^1 H(x,y)\,dF(x);$$

$$H(x,G) = \int_0^1 H(x,y)\,dG(y);$$

$$H(F,G) = \int_0^1 H(x,G)\,dF(x) =$$

$$= \int_0^1 H(F,y)\,dG(y) = \int_0^1\int_0^1 H(x,y)\,dF(x)\,dG(y),$$

причем интегралы в этих равенствах понимаются в смысле Стилтьеса.

Решением такой игры является тройка (F^*, G^*, υ), где υ – цена игры [1], а для оптимальных смешанных стратегий F^*, $F^* \in D$, и G^*, $G^* \in D$, с любыми смешанными стратегиями *F* и *G*, соответственно, игроков I и II должны выполняться неравенства

$$H(F, G^*) \le H(F^*, G^*) \le H(F^*, G). \qquad (1)$$

Известно [1–3], что решение приведенной игры существует, но никаких общих методов для точного нахождения решений непрерывных антагонистических игр пока не найдено. Однако если функция выигрыша $H(F, G)$ имеет некоторые специфические свойства, то решения рассматриваемых игр можно получать в явном виде. Один из таких классов функций выигрыша составляют выпуклые функции [4]. В настоящей работе обобщается понятие выпуклости и выделяется класс функций выигрыша так, что для игр с такими функциями также удается построить решение в явном виде.

α-выпуклые функции

Зафиксируем некоторое число α, $\alpha \in (0, \pi/2)$, и сделаем следующее определение.

Вещественная функция φ, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, называется α-выпуклой, если для любых $z', z'' \in [a,b]$ таких, что

$$\left| \frac{\varphi(z'') - \varphi(z')}{z'' - z'} \right| \le \operatorname{tg}\alpha, \qquad (2)$$

и для любого $\lambda \in [0,1]$ следует неравенство

$$\varphi(\lambda z' + (1-\lambda) z'') \le \lambda\varphi(z') + (1-\lambda)\varphi(z''). \qquad (3)$$

Геометрически принадлежность функции φ классу α-выпуклых функций соответствует следующему: либо всякая дуга графика такой функции не поднимается выше стягивающей ее хорды, если хорда от-

Получено 08.08.11

клоняется от оси z на угол, меньший угла α, либо прямая, отклоняющаяся от оси z на угол, меньший угла α, пересекает график функции φ не более чем в одной точке.

Будем также говорить, что функция φ α-вогнута, если функция $-\varphi$ α-выпукла.

Нам потребуются некоторые свойства функций из введенных классов. Свойства α-вогнутых функций симметричны свойствам α-выпуклых функций. Поэтому ограничимся изучением α-выпуклых функций.

Теорема 1. Функция, α-выпуклая на отрезке, при увеличении аргумента не может переходить от возрастания к убыванию.

Доказательство. Пусть функция φ является α-выпуклой на отрезке $[a,b]$. Предположим, что $a \le z_1 < z_2 < z_3 \le b$, но $\varphi(z_1) < \varphi(z_2)$ и $\varphi(z_3) < \varphi(z_2)$. В силу непрерывности φ существуют такие z_1', z_3', что $z_1 \le z_1' < z_2 < z_3' \le z_3$, и

$$\varphi(z_1') = \varphi(z_3') < \varphi(z_2). \qquad (4)$$

Найдем такое $\lambda \in [0,1]$, что $z_2 = \lambda z_1' + (1-\lambda) z_3'$. Тогда на основании (3) будут выполняться соотношения

$$\varphi(z_2) = \varphi\left(\lambda z_1' + (1-\lambda) z_3'\right) \le$$
$$\le \lambda\varphi\left(z_1'\right) + \left(1-\lambda\right)\varphi\left(z_3'\right) = \varphi(z_1'),$$

что противоречит (4). Теорема доказана.

Из геометрических соображений следует

Теорема 2. Пусть непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция является α-выпуклой на отрезках $[a,c]$, $[c,b]$ и принимает свое наименьшее значение m в точке c, т. е. $m = \inf\limits_{z\in[a,b]} \varphi(z) = \varphi(c)$. Тогда функция φ α-выпукла на $[a,b]$.

Если функция φ, гладкая и α-выпуклая на отрезке $[a,b]$, достигает своего наименьшего значения в точке $c \in [a,b]$, то, очевидно, существует отрезок $[d,e] \subset [a,b]$, $c \in [d,e]$, такой, что функция φ выпукла на $[d,e]$. Таким образом, уместно говорить об отрезках из $[a,b]$, на которых функция φ выпукла и которые содержат все точки c, где функция φ принимает наименьшее на отрезке $[a,b]$ значение. Объединение всех таких отрезков мы будем называть множеством выпуклости функции φ и обозначать через U. Заметим, что в силу теорем 1, 2 множество U есть отрезок. Существуют α-выпуклые функции, которые на любом отрезке, содержащем все точки наименьшего значения функции и хотя бы одну точку, в которой значение функции больше наименьшего значения, не являются выпуклыми функциями. В этом случае под множеством выпуклости функции φ будем понимать множество M всех точек из $[a,b]$, в которых функция φ принимает свое наименьшее значение. Итак, будем считать, что множество выпуклости U всегда для α-выпуклой функции не пусто и в вырожденных случаях $U = M$.

α-выпуклые игры на единичном квадрате

Будем говорить, что непрерывная антагонистическая игра на единичном квадрате с функцией выигрыша H является α-выпуклой, если функция $H(x,\cdot): Y \to R$ α-выпукла при любом значении $x \in X$ и множество $M_x \subset \bigcap\limits_{x\in X} U_x$ при любом значении $x \in X$.

Здесь через M_x и U_x обозначены, соответственно, множество точек, в которых функция $H(x,y)$ принимает свое наименьшее значение $\inf\limits_{y\in Y} H(x,y)$ при фиксированном $x \in X$, и множество выпуклости функции $H(x,y)$ при фиксированном $x \in X$.

Заметим, что α-выпуклым играм соответствуют α-вогнутые игры, определение которых делается симметрично α-выпуклым играм.

Как и во всякой непрерывной игре на единичном квадрате, в α-выпуклой или в α-вогнутой играх игроки имеют смешанные оптимальные стратегии. В этом пункте статьи будут описаны строение и способы нахождения оптимальных стратегий игроков в таких играх, причем в основном будут рассматриваться α-выпуклые игры. Утверждения для α-вогнутых игр строятся аналогично соответствующим положениям, полученным для α-вогнутых игр.

Теорема 3. В α-выпуклой игре на единичном квадрате игрок II имеет чистые оптимальные стратегии. Множество всех стратегий составляет отрезок.

Доказательство. Рассмотрим α-выпуклую игру Γ с функцией выигрыша H. Пусть υ_Γ – цена игры Γ; F^* – одна из оптимальных стратегий игрока I; G^* – игрока II. Тогда $H(x,G^*) \le H(F^*,G^*) = \upsilon_\Gamma$ для любого $x \in [0,1]$.

В условиях смешанной стратегии G^* игрока II чистая его стратегия y оказывается случайной величиной, принимающей числовые значения. Поэтому можно говорить о математическом ожидании y^* этой случайной величины.

Обозначим $[c,d] = \bigcap\limits_{x\in X} U_x$ и покажем, что $y^* \in [c,d]$. Для этого достаточно установить, что

$$G^*(y) = \begin{cases} 0, \ y < c, \\ 1, \ y > d. \end{cases} \qquad (5)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(y) = \int\limits_0^1 H(x,y)\,dF^*(x), \quad y \in [0,1].$$

Эта функция является непрерывной на отрезке $[0,1]$ и принимает свое наименьшее значение только в каких-то точках отрезка $[c,d]$. В самом деле, пусть $y_0 \in [0,1]$, $y_0 \notin [c,d]$ и $\varphi(y_0) = \inf_{y\in[0,1]} \varphi(y)$. В силу свойств функции $F^*(x)$ существует точка $x_0 \in [0,1]$ такая, что в любой окрестности x_0 функция F^* не равна постоянной. Для простоты будем считать, что $x_0 \in (0,1)$. Так как $M_{x_0} \subset [c,d]$, то существует $\delta_{y_0} > 0$ такое, что для любого $x \in [x_0 - \delta_{y_0}, x_0 + \delta_{y_0}] \subset [0,1]$ выполняется неравенство $H(x, y_0) > H(x, \bar{y})$, $\bar{y} \in M_{x_0}$.

Но тогда

$$\varphi(y_0) = \int_0^{x_0-\delta_{y_0}} H(x,y_0)dF^*(x) +$$

$$+ \int_{x_0-\delta_{y_0}}^{x_0+\delta_{y_0}} H(x,y_0)dF^*(x) + \int_{x_0-\delta_{y_0}}^{1} H(x,y_0)dF^*(x) >$$

$$> \int_0^1 H(x,\bar{y})dF^*(x) = \varphi(\bar{y}).$$

Итак, непрерывная на $[0,1]$ функция $\varphi(y)$ принимает свое наименьшее значение только в точках отрезка $[c,d]$. Поэтому для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ существует такое положительное δ, что для $0 \le y \le c - \varepsilon_1$ и для $d + \varepsilon_2 \le y \le 1$ мы имеем $\varphi(y) \ge \lambda + \delta$, где $\lambda = \inf_{y\in Y} \varphi(y)$.

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \varphi(y)dG^*(y) = \int_0^{c-\varepsilon_1} \varphi(y)dG^*(y) +$$

$$+ \int_{c-\varepsilon_1}^{d+\varepsilon_2} \varphi(y)dG^*(y) + \int_{d+\varepsilon_2}^{1} \varphi(y)dG^*(y) \ge$$

$$\ge \int_0^1 \lambda dG^*(y) + \int_0^{c-\varepsilon_1} \delta dG^*(y) + \int_{d+\varepsilon_2}^{1} \delta dG^*(y) =$$

$$= \lambda + \delta(1 + G^*(c-\varepsilon_1) - G^*(d+\varepsilon_2)).$$

Но, как известно (см., например, [1]), $\upsilon_\Gamma = \lambda$, и, следовательно,

$$\lambda \ge \lambda + \delta(1 + G^*(c-\varepsilon_1) - G^*(d+\varepsilon_2)).$$

Поскольку $\delta > 0$ и $1 + G^*(c-\varepsilon_1) - G^*(d+\varepsilon_2) \le 0$, то $G^*(d+\varepsilon_2) - G^*(c-\varepsilon_1) = 1$. Откуда в силу произвольности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и следует (5).

Таким образом, $y^* \in [c,d]$ и, более того,

$$y^* = \int_0^1 y dG^*(y) = \int_c^d y dG^*(y). \qquad (6)$$

Так как функция $H(x,y)$ выпукла на $[c,d]$ по y при любом x, то из (6) получим для любого $x \in [0,1]$

$$H(x,y^*) = H(x, \int_0^1 y dG^*(y)) =$$

$$= H(x, \int_c^d y dG^*(y)) \le \int_c^d H(x,y)dG^*(y) =$$

$$= \int_0^1 H(x,y)dG^*(y) = H(x, G^*(y)) \le H(F^*, G^*) = \upsilon_\Gamma.$$

Следовательно, y^* является оптимальной стратегией игрока II.

Если теперь y' и y'' – чистые оптимальные стратегии игрока II, то в силу доказанных выше свойств функции $\varphi(y)$ и y', и y'' принадлежат отрезку $[c,d]$. Кроме того, должны выполняться неравенства $H(x,y') \le \upsilon_\Gamma$, $H(x,y'') \le \upsilon_\Gamma$, $x \in X$.

Отсюда ввиду выпуклости функции $H(x,\cdot)$ на отрезке $[c,d]$ при любом $\lambda \in [0,1]$ для всех x выполняется неравенство

$$H(x, \lambda y' + (1-\lambda)y'') \le \lambda H(x,y') + (1-\lambda)H(x,y'') \le \upsilon_\Gamma.$$

Последнее означает оптимальность чистой стратегии $\lambda y' + (1-\lambda)y''$.

В силу непрерывности функции $H(x,\cdot)$ множество тех значений y, для которых $H(x,y) \le \upsilon_\Gamma$, должно быть замкнутым. Остается заметить, что выпуклое замкнутое подмножество отрезка само должно быть отрезком.

Выделим некоторые оптимальные стратегии игрока I. Имеет место

Теорема 4. Пусть Γ – α-выпуклая игра с функцией выигрыша $H(x,y)$, дифференцируемой по y при любом x; y^* – чистая оптимальная стратегия игрока II в ней; v_Γ – ее значение. Тогда

1) если y^* =1, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x', для которой $H'_y(x',1) \le 0$;

2) если $y^* = 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I имеется чистая стратегия x'', для которой $H'_y(x'',0) \ge 0$;

3) если $0 \le y^* \le 1$, то среди оптимальных стратегий игрока I найдется такая, я которая является смесью двух существенных стратегий x' и x'', с которыми выполняются неравенства $H'_y(x',y^*) \le 0$, $H'_y(x'',y^*) \ge 0$.

При этом стратегии x' и x'' используются с вероятностями λ и $1 - \lambda$, где λ находится из уравнения

$$\lambda H'_y(x',y^*) + (1-\lambda)H'_y(x'',y^*) = 0.$$

Формулировка этого утверждения здесь заимствована из книги [1], в которой она приводится для случая выпуклой игры. Доказательство теоремы 4 можно также взять из [1], за исключением следующего момента. Отдельно приходится обосновывать, что обращение в нуль в точке y^* частной производной по y функции

$$H\left(X^*, y\right) = \lambda^* H\left(x', y\right) + \left(1-\lambda^*\right) H\left(x'', y\right), 0 \le \lambda^* \le 1, (7)$$

достаточно для того, чтобы в этой точке функция $H\left(X^*, y\right)$ имела наименьшее значение. Последнее становится очевидным, если функция (7) является α^*-выпуклой по y при любом фиксированном λ^*. Докажем это. Пусть $\lambda^* > 0$ (случаи $\lambda^* = 0;1$ очевидны). Вновь обозначим через $[c,d] = \bigcap_{x\in X} U_x$, и рассмотрим функцию (7) отдельно на каждом из множеств: $[0,c],[c,d],[d,1]$. На $[c,d]$ функция (7) выпукла как линейная комбинация выпуклых функций. На $[0,c]$ и $[d,1]$ функция является α^*-выпуклой, $\operatorname{tg}\alpha^* = \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}\operatorname{tg}\alpha$. По теореме 2, функция (7) α^*-выпукла по y на отрезке [0,1]. Теорема 4 доказана.

Таким образом показано, что для α-выпуклых игр справедливы основные утверждения, соответствующие выпуклым играм. Поэтому решения для α-выпуклых игр можно строить по известным схемам, используемым в выпуклых играх.

Библиографические ссылки

1. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М. : Наука, 1985. – 272 с.
2. *Мак-Кинси Д.* Введение в теорию игр. – М. : Физматгиз, 1960. – 420 с.
3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М. : Мир, 1963. – 839 с.
4. *Bohnenblust H. F.*, *Karlin S.*, *Shapley L. S.* Games with Continuous, Convex Pay-off, Contribs, to the Theory of Games / ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. – Study 24. – Princeton, N. J. : Princeton Univ. Press, 1950.

M. A. Sevodin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Perm State Technical University

Antagonistic Game Solution with a Continuous α-convex Payoff Function

The antagonistic game with a continuous α-convex payoff function is considered. One of the possible generalizations of functions, α-convex functions is built. It is established that the games with α-convex payoff function can be solved in the same way as a convex game.

Key words: convex function, continuous games, mixed strategies.

УДК 519.712:510.25

Н. И. Калядин, кандидат технических наук, Ижевский государственный технический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

Исследуются способы построения инвариантов при эталонировании множеств для компьютерного моделирования экспертных систем.

Ключевые слова: экспертная система, эталонирование, инвариант, информативная зона, модель.

В настоящей работе моделируются решающие правила для экспертных систем с использованием *инвариантов* при эталонировании множеств и отношений. С этой целью применяются специализированное эталонирование и решатели, позволяющие разделять множества по классам, что, в свою очередь, позволяет использовать незначительную выборку и простые решатели с использованием прецедентов [1–3].

Инвариантное покрытие класса

В данном случае эталонирование строится так, что оно накрывает одним эталонным множеством весь класс или всех представителей обучающей информации из данного класса. Такое инвариантное описание классов с использованием *сильно слипающихся* множеств в обучении позволяет компактно содержать информацию в эталонах по всем имеющимся классам.

Определение 1 [3, с. 62]. *Два множества* $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_j \in \mathfrak{M}$, $i \ne j$, *называются сильно слипающимися, если:*

1) $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j \ne \varnothing$; 2) $\mathfrak{X}_i \setminus \mathfrak{X}_j \ne \varnothing$; 3) $\mathfrak{X}_j \setminus \mathfrak{X}_i \ne \varnothing$, *то есть два множества* $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_j$ *отличаются между собой хотя бы на один элемент.*

Пусть имеется основное множество $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_m\}$ из m конечных подмножеств $\mathfrak{X}_i$ натурального ряда $N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$;

$S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ – разбиение множества $\mathfrak{M}$,

Получено 31.10.11