случая выпуклой игры. Доказательство теоремы 4 можно также взять из [1], за исключением следующего момента. Отдельно приходится обосновывать, что обращение в нуль в точке y^* частной производной по y функции

$$H\left(X^*, y\right) = \lambda^* H\left(x', y\right) + \left(1-\lambda^*\right) H\left(x'', y\right),\ 0 \le \lambda^* \le 1, \quad (7)$$

достаточно для того, чтобы в этой точке функция $H\left(X^*, y\right)$ имела наименьшее значение. Последнее становится очевидным, если функция (7) является α^*-выпуклой по y при любом фиксированном λ^*. Докажем это. Пусть $\lambda^* > 0$ (случаи $\lambda^* = 0;1$ очевидны). Вновь обозначим через $[c,d] = \bigcap\limits_{x \in X} U_x$, и рассмотрим функцию (7) отдельно на каждом из множеств: $\left[0,c\right],\left[c,d\right],\left[d,1\right]$. На $\left[c,d\right]$ функция (7) выпукла как линейная комбинация выпуклых функций. На $\left[0,c\right]$ и $\left[d,1\right]$ функция является α^*-выпуклой, $\operatorname{tg}\alpha^* = \min\{\lambda^*, 1-\lambda^*\}\operatorname{tg}\alpha$. По теореме 2, функция (7) α^*-выпукла по y на отрезке [0,1]. Теорема 4 доказана.

Таким образом показано, что для α-выпуклых игр справедливы основные утверждения, соответствующие выпуклым играм. Поэтому решения для α-выпуклых игр можно строить по известным схемам, используемым в выпуклых играх.

Библиографические ссылки

1. *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М. : Наука, 1985. – 272 с.
2. *Мак-Кинси Д.* Введение в теорию игр. – М. : Физматгиз, 1960. – 420 с.
3. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М. : Мир, 1963. – 839 с.
4. *Bohnenblust H. F.*, *Karlin S.*, *Shapley L. S.* Games with Continuous, Convex Pay-off, Contribs, to the Theory of Games / ed. H. W. Kuhn, A. W. Tucker, Ann. Math. – Study 24. – Princeton, N. J. : Princeton Univ. Press, 1950.

M. A. Sevodin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Perm State Technical University

Antagonistic Game Solution with a Continuous α-convex Payoff Function

The antagonistic game with a continuous α-convex payoff function is considered. One of the possible generalizations of functions, α-convex functions is built. It is established that the games with α-convex payoff function can be solved in the same way as a convex game.

Key words: convex function, continuous games, mixed strategies.

УДК 519.712:510.25

Н. И. Калядин, кандидат технических наук, Ижевский государственный технический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ ОТНОШЕНИЙ

Исследуются способы построения инвариантов при эталонировании множеств для компьютерного моделирования экспертных систем.

Ключевые слова: экспертная система, эталонирование, инвариант, информативная зона, модель.

В настоящей работе моделируются решающие правила для экспертных систем с использованием *инвариантов* при эталонировании множеств и отношений. С этой целью применяются специализированное эталонирование и решатели, позволяющие разделять множества по классам, что, в свою очередь, позволяет использовать незначительную выборку и простые решатели с использованием прецедентов [1–3].

Инвариантное покрытие класса

В данном случае эталонирование строится так, что оно накрывает одним эталонным множеством весь класс или всех представителей обучающей информации из данного класса. Такое инвариантное описание классов с использованием *сильно слипающихся* множеств в обучении позволяет компактно содержать информацию в эталонах по всем имеющимся классам.

Определение 1 [3, с. 62]. *Два множества $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_j \in \mathfrak{M}$, $i \ne j$, называются сильно слипающимися, если:*

1) $\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j \ne \varnothing$; 2) $\mathfrak{X}_i \setminus \mathfrak{X}_j \ne \varnothing$; 3) $\mathfrak{X}_j \setminus \mathfrak{X}_i \ne \varnothing$, *то есть два множества $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_j$ отличаются между собой хотя бы на один элемент.*

Пусть имеется основное множество $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \left\{\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_m\right\}$ из m конечных подмножеств $\mathfrak{X}_i$ натурального ряда $N \rightleftharpoons \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}$;

$S \rightleftharpoons \left\{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_t\right\}$ – разбиение множества $\mathfrak{M}$,

Получено 31.10.11

где $\mathfrak{N}_i$ – класс, содержащий не менее одного множества, идентифицируется предикатом

$$\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_i, \ i = \overline{1, m}, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $f : \mathfrak{I}_m \to \mathfrak{I}_t$ – классифицирующая функция, распределяющая номера элементов основного множества $\mathfrak{M}$ по номерам классов из S, то есть $D_k = \{i \mid f(i) = k\}$, $\left(k = \overline{1, t}\right)$ – множество номеров эталонных объектов.

Далее, воспользовавшись алгоритмом из работы [2, с. 41−42] или его модификацией [3, с. 62−63], получаем эталонные множества ε_i.

Под *инвариантностью описания* эталонов понимается независимая от порядка следования исходных множеств в каждом классе $\mathfrak{N}_j$ процедура выбора эталонов.

Под *чувствительностью эталона* понимается возможность обнаружения по этому эталону неизвестной реализации в каком-либо классе без нарушения зоны перекрытия «чужих» классов.

Процедура эталонирования сильно слипающихся множеств носит эмпирический характер и в целом не дает оптимального (наименьшего) количества эталонов. Этот недостаток компенсируется алгоритмами оптимального построения эталонных множеств для ретроспективной информации с привлечением для этого бинарного отношения частичного порядка на множествах натуральных чисел [4−6].

Построение инвариантных минимальных эталонов

Рассмотрим класс $\mathbb{R}$ всех конечных семейств конечных подмножеств натурального ряда $N \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$, у которых существуют разбиения, содержащие не менее двух элементов.

Поскольку любое $\mathfrak{M} \in \mathbb{R}$ конечно, то и всякое его разбиение S конечно.

С каждым разбиением $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, ..., \mathfrak{N}_t\}$, $(t \geq 2)$ семейства $\mathfrak{M} \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}_1, ..., \mathfrak{X}_m\}$, $(m \geq 2)$ свяжем псевдомодель $Mod = \langle \mathfrak{M}; \sigma \rangle$ с основным множеством $\mathfrak{M}$ и псевдосигнатурой $\sigma \rightleftharpoons \{R_1, R_2, \ldots, R_t\}$, содержащей t функционалов – точечных характеристических функций:

$$R_i(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_i, \ i \in \mathfrak{I}_t, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого семейства B через $P(B)$ будем обозначать *булеан-множество* всех подмножеств множества B. Для любого семейства $C \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}\}$ введем операции объединения $O(C)$ и пересечения $\Pi(C)$ следующим образом:

$$O(C) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \operatorname{card} C = 0, \\ \mathfrak{X}, \text{ если } \operatorname{card} C = 1, \\ \bigcup\limits_{\mathfrak{X} \in C} \mathfrak{X}, \text{ если } \operatorname{card} C \geq 2; \end{cases}$$

$$\Pi(C) = \begin{cases} \varnothing, \text{ если } \operatorname{card} C = 0, \\ \mathfrak{X}, \text{ если } \operatorname{card} C = 1, \\ \bigcap\limits_{\mathfrak{X} \in C} \mathfrak{X}, \text{ если } \operatorname{card} C \geq 2; \end{cases}$$

($\operatorname{card} C$ – кардинал множества C), на множестве $P(O(\mathfrak{M}))$ введем частичный порядок:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2.$$

Постановка задачи. Для разбиения $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ семейства $\mathfrak{M}$ найти t минимальных эталонов ε_i, $\left(i = \overline{1, t}\right)$, которые бы позволяли инвариантно описывать представителей i-го класса эквивалентности $\mathfrak{N}_i$ разбиения S с последующим применением их в процессе вычисления характеристических функций псевдосигнатуры σ.

Для решения вышеуказанной задачи введем следующие дополнительные обозначения.

Пусть

$$C_i \rightleftharpoons \{G \mid G \in P(\mathfrak{N}_i) \,\&\, \Pi(G) \neq \varnothing\}, \ \left(i = \overline{1, t}\right).$$

Пусть в C_i нашлось t_i максимальных элементов-множеств $G_1^i, G_2^i, \ldots, G_{t_i}^i$. Тогда, выбирая по элементу из каждого множества $\Pi\left(G_j^i\right)$, $\left(j = \overline{1, t_i}\right)$ сформируем эталонные множества ε_i, $\left(i = \overline{1, t}\right)$.

Далее построим логическую матрицу $q = \|q_{ij}\|_{t \times t}$ такую, что

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \varepsilon_i \cap O\left(\mathfrak{N}_j\right) \neq \varnothing, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

и для $\forall \mathfrak{X} \in O(C)$ положим

$$P(\mathfrak{X}) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varepsilon_i \cap \mathfrak{X} \neq \varnothing, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $i, j \in \mathfrak{I}_t \rightleftharpoons \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Приведем без доказательства следующие утверждения.

Л е м м а 1 [3, с. 64]. *Если* $(\forall i \in \mathfrak{I}_m)[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing]$, *то* $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})\ \left\lceil R_i(\mathfrak{X}) \Rightarrow P_i(\mathfrak{X}) \right\rceil$.

Теорема 1 [3, с. 64]. *Для любого разбиения* $S \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_t\}$ *семейства* $O(C) \in \mathbb{R}$, *если* $(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_t)\left[q_{ij} = 1 \Rightarrow q_{ji} = 0\right]$, *то* $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})$

$$\left[R_i(\mathfrak{X}) = P_i(\mathfrak{X}) \,\&\, \neg \left[\bigvee\limits_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} P_k(\mathfrak{X}) \,\&\, q_{ik} \right] \right].$$

Положим

$$\mathfrak{X}'_i \rightleftharpoons \mathfrak{X}_i \setminus \bigcup_{j\in\mathfrak{I}_t\setminus\{i\}} \bigcup_{k\in D_j} \mathfrak{X}_k; \qquad \mathfrak{M}' \rightleftharpoons \{\mathfrak{X}'_1,\dots,\mathfrak{X}'_m\};$$

$S' \rightleftharpoons \{\mathfrak{N}'_1,\dots,\mathfrak{N}'_t\}$.

Пусть

$$C'_i \rightleftharpoons \{G' \mid G' \in P(\mathfrak{N}'_i) \,\&\, \Pi(G') \ne \varnothing\},\ i\in\mathfrak{I}_t$$

и в C'_i нашлось t'_i максимальных элемента множества $C'^{\,i}_1, C'^{\,i}_2,\dots,C'^{\,i}_{t_i}$.

Тогда, выбирая по элементу из каждого множества $\Pi\left(G'^{\,i}_j\right)$, $j=\overline{1,\,t'_i}$, построим эталонные множества ε'_i, $\left(i=\overline{1,\,t}\right)$.

Положим $q'=\|q'_{ij}\|_{t\times t}$, где

$$q'_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } \varepsilon'_i\cap O(\mathfrak{N}'_j)\ne\varnothing,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

и для каждого $\mathfrak{X}\in O(C)$ положим

$$P'_i(\mathfrak{X})=\begin{cases}1, \text{ если } \varepsilon'_i\cap\mathfrak{X}\ne\varnothing, i\in\mathfrak{I}_t,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда из теоремы 1 вытекает справедливость следствия 1.

Следствие 1. *Если для любого разбиения* $S\rightleftharpoons\{\mathfrak{N}_1,\dots,\mathfrak{N}_t\}$ *семейства* $O(C)$ *имеется* $\left[\lceil\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_i\rceil\Rightarrow\mathfrak{X}'_i\ne\varnothing\right]$, *то* $R_i(\mathfrak{X})=P'_i(\mathfrak{X})$, $i\in\mathfrak{I}_t$.

Введенный частичный порядок

$$G_1\le G_2 \Leftrightarrow G_1\subseteq G_2$$

на семействах подмножеств классов из $P(\mathfrak{N}_i)$ позволяет выделить максимальные подсемейства с непустыми зонами эталонов в перекрытии так, чтобы количество этих эталонов было минимальным [4].

Вычисление предикатов классификации для сильно слипающихся множеств

Пусть предикат классификации

$$R_i(\mathfrak{X})=\begin{cases}1, \text{ если } \varepsilon_i\cap\mathfrak{X}\ne\varnothing,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Через $\|Q\|_{m\times m}$ обозначим логическую матрицу такую, что

$$Q_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } \varepsilon_i\cap\bigcup\limits_{k\in D_j}\mathfrak{X}_k\ne\varnothing,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}\quad\left(i,j=\overline{1,\,t}\right).$$

Лемма 2

Пусть $(\forall i\in\mathfrak{I}_t)(\forall\mathfrak{X}'_i\in\mathfrak{M}')[\mathfrak{X}'_i\ne\varnothing]$.

Тогда $(\forall\mathfrak{X}\in\mathfrak{M})[\mathcal{P}_i(\mathfrak{X})\Rightarrow R_i(\mathfrak{X})]$.

Лемма 3

$$(\forall i\ne j\in\mathfrak{I}_t)\left[\bigcup_{p\in D_i}\mathfrak{X}_p\cap\bigcup_{g\in D_j}\mathfrak{X}_g=\varnothing\Rightarrow Q_{ij}=0\right].$$

Доказательство. Действительно,

$$\left[\varepsilon_i\subseteq\bigcup_{k\in D_i}\mathfrak{X}_k\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\forall i\ne j\in\mathfrak{I}_t)\left[\varepsilon_i\cap\bigcup_{k\in D_j}\mathfrak{X}_k=\varnothing\Rightarrow Q_{ij}=0\right].\qquad\square$$

Теорема 2. *Если* $(\forall\mathfrak{X}_i\in\mathfrak{M}')[\mathfrak{X}'_i\ne\varnothing]$, *то* $(\forall\mathfrak{X}\in\mathfrak{M})[\mathcal{P}_i(\mathfrak{X})=R_i(\mathfrak{X})]$.

Доказательство

$(\rightarrow)$ Если $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X})=1$, то $R_i(\mathfrak{X})=1$ в силу леммы 2.

$(\leftarrow)$ Если $\mathcal{P}(\mathfrak{X})=0$, то $R_i(\mathfrak{X})=0$. В самом деле, в силу того что S – разбиение, то

$$\left(\underset{j=i}{\exists}\, j\in\mathfrak{I}_t\right)\left[\mathcal{P}_j(\mathfrak{X})=1\right].$$

Предположим противное, то есть $R_i(\mathfrak{X})=1$, тогда $\mathfrak{X}\cap\varepsilon_i\ne\varnothing$, по определению. Так как $\mathfrak{X}\in\mathfrak{N}_j$ и $\mathfrak{X}\cap\varepsilon_i\ne\varnothing$, то $\varepsilon_i\cap\bigcup\limits_{\mathfrak{X}\in\mathfrak{N}_j}\mathfrak{X}\ne\varnothing\Rightarrow Q_{ij}=1$. Отсюда следует противоречие с леммой 2. Следовательно, предположение неверно, то есть $R_i(\mathfrak{X})=0$.

По закону контрапозиции имеем

$$R_i(\mathfrak{X})\Rightarrow\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}).$$

Теорема доказана. $\square$

Постановка задачи. Требуется найти способ вычисления предикатов:

$$\mathcal{P}_i(\mathfrak{X})=\begin{cases}1, \text{ если } \mathfrak{X}\in\mathfrak{N}_i,(i=\overline{1,t}),\\ 0 \text{ в противном случае}\end{cases}$$

посредством эталонов ε_i и выявить условия, при которых такое решение существует.

Теорема 3. *Пусть* $S\rightleftharpoons\{\mathfrak{N}_1,\mathfrak{N}_2,\dots,\mathfrak{N}_t\}$ *таково, что*

$$(\forall i\in\mathfrak{I}_t)(\forall\mathfrak{I}\in\mathfrak{M})\ \left[\mathfrak{I}\in\mathfrak{N}_i\Rightarrow\mathfrak{I}\cap Q_i(S)\ne\varnothing\right].$$

где $\mathfrak{L}_k,\left(k=\overline{1,t_i}\right)$ *– максимальные элементы семейства* B_i,

$$Q_i(S)=\bigcup_{k=1}^{t_i}\left(\bigcup_{p\in D_i}\mathfrak{X}_P\setminus\bigcup_{z\in\mathfrak{L}_k}\mathfrak{X}_z\right).\qquad(*)$$

$$B_i=\left\{\mathfrak{L}\mid\mathfrak{L}\in\bigcup_{j\in\mathfrak{I}_t\setminus\{i\}}\left(\bigcup_{g\in D_j}\mathfrak{X}_g\right)\&\bigcup_{p\in D_j}\mathfrak{X}_p\subseteq\bigcup_{\mathfrak{I}\in\mathfrak{L}}\mathfrak{I}\right\}.$$

Кроме того,

$$(\forall i\ne j\in\mathfrak{I}_t)\left[Q_{ij}=1\Rightarrow Q_{ji}=0\right].\qquad(**)$$

Тогда $(\forall\mathfrak{X}\in\mathfrak{M})(\forall i\in\mathfrak{I}_t)$

$$\left[\mathcal{P}_i(\mathfrak{X})=R_i(\mathfrak{X})\&\neg\left[\bigvee_{k\in\mathfrak{I}_t\setminus\{i\}}R_k(\mathfrak{X})\&Q_{ik}\right]\right].$$

Доказательство. Для доказательства введем две очевидные леммы.

Лемма 4

$(\forall i \in \mathfrak{I}_t)\ (\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})[\mathfrak{X}_i \neq \varnothing] \Rightarrow [Q_{ii} = 1].$

Лемма 5. *Если выполнено условие* (*) *теоремы 3, то*

$$(\forall i \in \mathfrak{I}_t)(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})\left[\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) \Rightarrow R_i(\mathfrak{X})\right].$$

Продолжим доказательство теоремы 3.

$(\rightarrow)$ Пусть $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 1$ для некоторого $i \in \mathfrak{I}_t$. В силу леммы 5 $R_i(\mathfrak{X}) = 1$, то есть $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_i \neq \varnothing$.

Возьмем произвольное $k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}$ и покажем, что $R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$.

Пусть $Q_{ik} = 1$, тогда в силу (**) $Q_{ki} = 0$. Отсюда $\varepsilon_k \cap \bigcup_{\mathfrak{I} \in \mathfrak{N}_i} \mathfrak{I} = \varnothing$, но $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{I} \in \mathfrak{N}_i} \mathfrak{I}$. Тогда $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_k = \varnothing$, то есть $R_k(\mathfrak{X}) = 0$ и $R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$.

Пусть $R_k(\mathfrak{X}) = 1$. Это значит, что $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_k \neq \varnothing$, $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup_{\mathfrak{I} \in \mathfrak{N}_i} \mathfrak{I}$.

Следовательно, $\varepsilon_k \cap \bigcup_{\mathfrak{I} \in \mathfrak{N}_i} \mathfrak{I} \neq \varnothing$, то есть $Q_{ki} = 1$, и в силу (**) Q_{ik} и $R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$. Случаи $Q_{ik} = 0$ и $R_k(\mathfrak{X}) = 0$ тривиальны. Таким образом, $\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$.

Значит, $R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik}\right] = 1$.

$(\leftarrow)$ Пусть $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 0$. Покажем, что в этом случае

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik}\right] = 0.$$

В самом деле, если $R_i(\mathfrak{X}) = 0$, то это очевидно.

Положим теперь, что $R_i(\mathfrak{X}) = 0$. Это значит, что $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_i \neq \varnothing$.

Поскольку $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 0$, а S – разбиение $\mathfrak{M}$, то существует такое $j \neq i$, что $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 1$. Тогда в силу леммы 5 $R_j(\mathfrak{X}) = 1$, но $Q_{jj} = 1$ в силу леммы 4.

Поэтому $R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{jj} = 1$.

Отсюда $\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 1$.

Следовательно,

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik}\right] = 0.$$

Теорема доказана. □

Расширим условия существования решения в теореме 3, в частности, усилим условие (*) в теореме 3 в виде условия (1) в следующей теореме 4.

Теорема 4. *Пусть* S *– разбиение* $\mathfrak{M}$ *и* $(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})$ *выполняются условия:*

$$(\forall i \in \mathfrak{I}_t)[\mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_i] \Rightarrow$$

$$(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_t)\left[\mathfrak{X} \cap \bigcup_{k \in D_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing \Rightarrow Q_{ji} = 1\right]. \quad (1)$$

$$(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_t)\left[Q_{ij} = 1 \Rightarrow Q_{ji} = 0\right]. \quad (2)$$

Тогда $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik}\right]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} \in \mathfrak{N}_i$, то есть $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 1$.

Покажем, что $R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij}\right] = 1$.

В самом деле,

$$(\forall i \neq j \in \mathfrak{I}_t)(\forall \mathfrak{X} \in \mathfrak{M})\ \left[\mathcal{P}_j(\mathfrak{X}) \Rightarrow R_j(\mathfrak{X})\right],$$

отсюда $R_i(\mathfrak{X}) = 1$.

Но тогда согласно определению предиката $R_i(\mathfrak{X})$ запишем $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_i \neq \varnothing$.

Покажем, что $\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$.

В самом деле, если $(\forall j \neq i \in \mathfrak{I}_t)\left[R_j(\mathfrak{X}) = 0\right]$, то $\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} = 0$ независимо от Q_{ik}.

Предположим противное, то есть $(\exists j \neq i)\left[R_j(\mathfrak{X}) = 1\right]$. Тогда $\mathfrak{X} \cap \bigcup_{k \in D_j} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$, но $\mathfrak{X} \subseteq \bigcup_{k \in D_i} \mathfrak{X}_k$, следовательно, по условию теоремы 4 $\varepsilon_j \cap \bigcup_{k \in D_i} \mathfrak{X}_k \neq \varnothing$, то есть $Q_{ji} = 1$. Отсюда в силу (2) $Q_{ij} = 0$. Тогда $R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij} = 0$.

Пусть $j_1, j_2, \ldots, j_r$ – все такие индексы, что $R_{jk}(\mathfrak{X}) = 1, \left(k = \overline{1, r}\right)$.

Отсюда $R_{jk}(\mathfrak{X}) \& Q_{jk} = 0$ по тем же соображениям. С другой стороны, для $j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ $\left[R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij} = 0\right]$ в силу того, что $R_j(\mathfrak{X}) = 0$. Отсюда следует, что $\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij} = 0$.

$(\leftarrow)$ Положим, что $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 0$ и докажем, что в этом случае

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij}\right] = 0.$$

Возможны два случая: $R_i(\mathfrak{X}) = 0$ или $R_i(\mathfrak{X}) = 1$.

В первом случае

$$R_i(\mathfrak{X}) \& \neg\left[\bigvee_{j \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_j(\mathfrak{X}) \& Q_{ij}\right] = 0$$

независимо от Q_{ij}.

Положим, что $R_i(\mathfrak{X}) = 1$, то есть $\mathfrak{X} \cap \varepsilon_i \neq \varnothing$.

Поскольку $\mathcal{P}_i(\mathfrak{X}) = 0$, а S – разбиение, то существует такое $j \neq i$, что $\mathcal{P}_j(\mathfrak{X}) = 1$. Тогда $R_j(\mathfrak{X}) = 1$. Но $Q_{jj} = 1$, поэтому, $R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ij} = 1$.

Отсюда $\underset{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}}{\vee} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ij} = 1$. Следовательно,

$$R_j(\mathfrak{X}) \& \neg \left[\bigvee_{k \in \mathfrak{I}_t \setminus \{i\}} R_k(\mathfrak{X}) \& Q_{ik} \right] = 0.$$

Теорема доказана. □

Заключение

Моделирование экспертных систем для распознавания отношений позволяет выделить инварианты для каждого класса, что обеспечивает конструктивизацию в построении решающих правил по прецедентам.

Библиографические ссылки

1. *Калядин Н. И.* Распознавание отношений методом коллективного голосования // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. –2011. – Вып. 3. – С. 154–162.

2. *Калядин Н. И.* Классификация сильно слипающихся множеств // Вестник Моск. акад. рынка труда и инф. технологий. – 2004. – № 4(12). – С. 41–46.

3. *Калядин Н. И.*, *Белоусов В. А.* Алгебрологические алгоритмы в распознавании, идентификации и классификации медицинских объектов // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. – 2005. – С. 61–66.

4. *Калядин Н. И.* Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Изв. ин-та математики и информатики. – 2007. – Вып. 1(38). – С. 3–231.

5. *Калядин Н. И.* , *Белоусов В. А.* К вопросу существования симультанной модели классификации объектов // Вестник Удм. ун-та. Математика. – 2006. – № 1. – С. 113–119.

6. *Калядин Н. И.* Конструктивизация в распознавании образов // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 188–193.

N. I. Kalyadin, Candidate of Technical Sciences, Izhevsk State Technical University

Modeling of Expert Systems for Detecting Relations

Methods to build invariants at standardizing sets for computer modeling of expert systems are studied.

Key words: expert system, standartization, invariant, informative zone, model.

УДК 532.543.3

А. М. Липанов, академик РАН, доктор технических наук, профессор, Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск
Н. В. Степанова, аспирант, Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск
Л. В. Шишкина, кандидат физико-математических наук, Ижевский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ ЧАСТИЧНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИНЫ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представлено математическое моделирование течения жидкости и газа после частичного разрушения плотины с помощью системы уравнений Навье – Стокса методом конечных разностей.

Ключевые слова: система уравнений Навье – Стокса, течение со свободной поверхностью, волновые явления на поверхности.

Плотины любых типов работают в сложных гидрологических и атмосферных условиях. Катастрофы на таких сооружениях приводят к образованию волн большой разрушающей способности не только ниже плотины, но и в водохранилище. Кроме того, в прилегающих к свободной поверхности жидкости слоях воздуха образуются зоны сжатия перед волной жидкости, которые также могут нанести значительные разрушения, и вихревые структуры за ней. За гребнем волны в жидкости образуется зона обратного течения, в которую попадает воздух из области, прилегающей к свободной поверхности жидкости. В результате появляется сложное течение, содержащее большое количество пузырей разной величины, часто называемое буруном. Если глубина воды в нижнем бьефе недостаточна, то бурун может интенсивно размывать берега и дно нижнего бьефа, что приводит к смыву и уносу плодородного слоя почвы. При этом в обратное течение попадает не только воздух, но и частицы грунта. Разрушения, возникающие ниже плотины, напрямую зависят от условий формирования волны в нижнем бьефе, поэтому существует определенный интерес в исследовании влияния различных факторов на этот процесс. Проведение таких исследований может быть выполнено как при помощи натурного эксперимента, так и путем численного моделирования. Натурный эксперимент требует больших материаль-

Получено 22.11.11