

Положим, что $R_i(\mathcal{X}) = 1$, то есть $\mathcal{X} \cap \varepsilon_i \neq \emptyset$.

Поскольку $\mathcal{P}_i(\mathcal{X}) = 0$, а S – разбиение, то существует такое $j \neq i$, что $\mathcal{P}_j(\mathcal{X}) = 1$. Тогда $R_j(\mathcal{X}) = 1$.

Но $Q_{jj} = 1$, поэтому, $R_k(\mathcal{X}) \& Q_{ij} = 1$.

Отсюда $\bigvee_{k \in \mathcal{J}_i \setminus \{i\}} R_k(\mathcal{X}) \& Q_{ij} = 1$. Следовательно,

$$R_j(\mathcal{X}) \& \left[\bigvee_{k \in \mathcal{J}_i \setminus \{i\}} R_k(\mathcal{X}) \& Q_{ik} \right] = 0.$$

Теорема доказана. \square

Заключение

Моделирование экспертных систем для распознавания отношений позволяет выделить инварианты для каждого класса, что обеспечивает конструктивизацию в построении решающих правил по прецедентам.

Библиографические ссылки

1. Калядин Н. И. Распознавание отношений методом коллективного голосования // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2011. – Вып. 3. – С. 154–162.
2. Калядин Н. И. Классификация сильно слипающихся множеств // Вестник Моск. акад. рынка труда и инф. технологий. – 2004. – № 4(12). – С. 41–46.
3. Калядин Н. И., Белоусов В. А. Алгебрологические алгоритмы в распознавании, идентификации и классификации медицинских объектов // Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика. – 2005. – С. 61–66.
4. Калядин Н. И. Конструктивизация моделей классификации конечных объектов // Изв. ин-та математики и информатики. – 2007. – Вып. 1(38). – С. 3–231.
5. Калядин Н. И., Белоусов В. А. К вопросу существования симультанной модели классификации объектов // Вестник Удм. ун-та. Математика. – 2006. – № 1. – С. 113–119.
6. Калядин Н. И. Конструктивизация в распознавании образов // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2008. – Вып. 2. – С. 188–193.

N. I. Kalyadin, Candidate of Technical Sciences, Izhevsk State Technical University

Modeling of Expert Systems for Detecting Relations

Methods to build invariants at standardizing sets for computer modeling of expert systems are studied.

Key words: expert system, standartization, invariant, informative zone, model.

УДК 532.543.3

А. М. Липанов, академик РАН, доктор технических наук, профессор, Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск
Н. В. Степанова, аспирант, Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск
Л. В. Шишкина, кандидат физико-математических наук, Ижевский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ ЧАСТИЧНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПЛОТИНЫ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Представлено математическое моделирование течения жидкости и газа после частичного разрушения плотины с помощью системы уравнений Навье – Стокса методом конечных разностей.

Ключевые слова: система уравнений Навье – Стокса, течение со свободной поверхностью, волновые явления на поверхности.

Плотины любых типов работают в сложных гидрологических и атмосферных условиях. Катастрофы на таких сооружениях приводят к образованию волн большой разрушающей способности не только ниже плотины, но и в водохранилище. Кроме того, в прилегающих к свободной поверхности жидкости слоях воздуха образуются зоны сжатия перед волной жидкости, которые также могут нанести значительные разрушения, и вихревые структуры за ней. За гребнем волны в жидкости образуется зона обратного течения, в которую попадает воздух из области, прилегающей к свободной поверхности жидкости. В результате появляется сложное течение, содержащее большое количество пузы-

рей разной величины, часто называемое буруном. Если глубина воды в нижнем бьефе недостаточна, то бурун может интенсивно размывать берега и дно нижнего бьефа, что приводит к смыву и уносу плодородного слоя почвы. При этом в обратное течение попадает не только воздух, но и частицы грунта. Разрушения, возникающие ниже плотины, напрямую зависят от условий формирования волны в нижнем бьефе, поэтому существует определенный интерес в исследовании влияния различных факторов на этот процесс. Проведение таких исследований может быть выполнено как при помощи натурального эксперимента, так и путем численного моделирования. Натурный эксперимент требует больших материаль-

ных затрат, а результаты его не могут быть использованы для других плотин, так как эти сооружения всегда уникальны. Численный же эксперимент не требует столь больших материальных затрат. Программное обеспечение, опробованное для расчета катастрофы на одной плотине, может быть использовано и для другой, если будут изменены только начальные и граничные условия. Таким образом, чтобы качественно смоделировать истечение при прорыве плотины в затопленный нижний бьеф, геометрические размеры водохранилища (в том числе промеры глубин), плотины и нижнего бьефа, необходимо программное обеспечение, позволяющее хорошо моделировать течения со свободной поверхностью в каналах с любой геометрией. Из вышесказанного следует, что течение в зоне прорыва плотины может быть только турбулентным. Попытки математического моделирования течений со свободной поверхностью предпринимались многими авторами [1–5]. Среди существующих на сегодняшний день программных комплексов, созданных с учетом этих исследований, можно отметить пакеты «Волна» и «Бор». Но оба пакета пригодны только для расчетов распространения волн по сухому руслу без учета взаимного влияния фаз, тогда как на практике в нижнем бьефе плотин находится вода. Кроме того, используемые там разностные схемы имеют низкий порядок точности, что приводит к серьезным погрешностям при численном исследовании турбулентных нестационарных течений, турбулентная вязкость моделируется с помощью одно- или двухпараметрических моделей. В работах [6, 7] показано, что такое моделирование не приводит к хорошему соответствию между экспериментом и расчетом. Наиболее близкое соответствие между численным и натурным экспериментами для турбулентных течений было получено в работах [7, 8]. Следует отметить, что физическая причина образующихся при прорыве плотины вихрей – внутреннее трение между слоями жидкости независимо от числа Рейнольдса потока. Математическое моделирование этих процессов возможно только с учетом вязких напряжений. Значит, применение математических моделей, предложенных в [7, 8], в нашем случае правомерно. Тестирование программного обеспечения и математической модели может быть проведено на стандартном лабораторном стенде, используемом в учебном процессе. Несмотря на то, что численный эксперимент в работах [7, 8] был проведен только для сжимаемой среды, мы решили распространить его и на несжимаемую среду. Поэтому в данной работе предлагается модель, в основе которой лежит нестационарная форма системы уравнений Навье – Стокса в двумерной по пространству постановке. Кроме того, в данной модели учтено влияние процессов в газовой фазе на жидкую фазу, то есть решена сопряженная задача. При этом напряжения трения рассчитывались по закону Стокса [6]. Кроме уже указанных были сделаны следующие допущения:

– пренебрегалось процессами растворения и диффузии воздуха в воде;

– пренебрегалось процессами захвата газовой фазы и образованием большого количества пузырей, а также их динамикой, что происходит при образовании бурунов и наложении отраженной от препятствия волны;

– пренебрегалось физическими процессами, происходящими при разрушении плотины;

– не учитывался теплообмен со стенками лотка; температуру воды в верхнем и нижнем бьефах принимали одинаковой и не меняли в зависимости от глубины водоема;

– пренебрегалось влиянием стенок (берегов) и шероховатостью дна;

– пренебрегалось влиянием сил поверхностного натяжения, возникающих на свободной границе жидкой фазы.

Математическая постановка задачи

Расчетная область полностью совпадает с исследуемой областью (см. рисунок). Она представляет собой резервуар прямоугольного сечения (верхний бьеф) с отверстием. В отверстии установлен затвор, после которого расположен лоток прямоугольного сечения (нижний бьеф), заполненный водой. В начальный момент времени задвижка между верхним и нижним бьефом открывается на определенную высоту h_0 . Высота воды в верхнем бьефе равна $H_{в.б.}$, в нижнем – $H_{н.б.}$. В момент времени t между верхним и нижним бьефом образуется отверстие у дна высотой h_0 , в связи с этим вода начинает поступать в лоток. На свободной поверхности в лотке формируются волны. При этом резервуар равномерно пополняется водой для поддержания постоянного напора.

Данная математическая модель записывается в виде системы уравнений Навье – Стокса [9], которая состоит из уравнения неразрывности, уравнения сохранения импульса в проекциях на две оси координат, уравнения сохранения энергии и двух уравнений для расчета изменения массовых концентраций воды и воздуха и выглядит следующим образом:

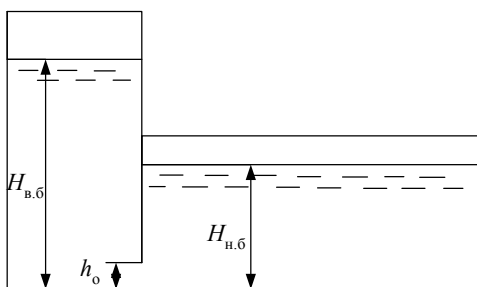
$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial D_1}{\partial x} + \frac{\partial D_2}{\partial y}, \quad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho c_1 \\ \rho c_2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uE \\ \rho uc_1 \\ \rho uc_2 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho vE \\ \rho vc_1 \\ \rho vc_2 \end{pmatrix};$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ -\rho u + \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ -\rho v + \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где ρ – плотность суммарная; p – давление; u, v – проекции скорости на оси x, y соответственно; τ_{ij} – проекция на ось j касательного напряжения на площадке, перпендикулярной оси $i, j \in (x, y), i \in (x, y), \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$; μ – динамический коэффициент вязкости; E – полная энергия смеси; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура смеси; c_1, c_2 – соответственно, концентрация воды и воздуха. Полная энергия воды и воздуха, как известно, рассчитывается по разным зависимостям: из-за сжимаемости воздуха эта функция содержит дополнительное слагаемое

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} + C_v T. \quad (2)$$



Расчетная область

В соотношении (2) второе слагаемое для несжимаемой жидкости будет содержать не теплоемкость при постоянном объеме C_v , а просто теплоемкость. В случае смеси этот параметр будет рассчитываться как теплоемкости смеси.

Кроме того, в замыкании системы (1) участвуют уравнения состояния для идеального газа и несжимаемой жидкости.

$$p = \rho RT, \quad \rho = \text{const}. \quad (3)$$

Начальные условия: 1) все компоненты скорости равны нулю; 2) температуры воды и воздуха равны; 3) давление воздуха постоянно, а воды подчиняется законам гидростатики.

Граничные условия: 1) условие сопряжения: $P_1 = P_2$; 2) на левой границе в канал через отверстие равномерно поступает вода со скоростью u_1 ; температура воды равна $T_1 = T_1^n$; давление воды $p_1 = p_1^H$, проекции скорости воздуха и воды на стенке равны нулю: $u_2 = v_2 = 0$; температура воздуха и воды равна $T_2 = T_2^n$; 3) на внешней границе от поверхности воды воздух не движется: $u_{2\infty} = v_{2\infty} = 0$; температура воздуха при этом равна $T_2 = T_2^n$, а давление атмосферное; 4) на нижней границе задаются условие прилипания и постоянства температуры $T_2 = T_2^n$; 5) на правой границе никаких условий не ставится.

Диапазон изменения параметров: 1) $T_1 = T_1^n$: 277 К...300 К; 2) u_1 : 1...4 м/с; 3) P_1^n : 1,0...1,1 атм.

Запись дискретного аналога уравнения (1) производится на основе метода конечных разностей. Для дискретизации пространственно-временная область покрывается сеткой, на которой векторы потоков вычисляются в полужелтых узлах.

Дискретизация уравнения на сетке производится с помощью трехточечного шаблона. Используется разнесенная сетка: параметры потока рассчитываются в узлах с целыми номерами, а векторы потоков – в узлах с полужелтыми номерами. Производные по пространству аппроксимируются с помощью центральных разностей и рассчитываются со вторым порядком точности относительно шагов интегрирования по x и y . Производная по времени аппроксимируется с первым порядком точности.

$$\begin{aligned} & \frac{Q_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^n - Q_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta t} = \\ & = - \frac{F_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1} - F_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta x} - \frac{G_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1} - G_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta y} + \\ & + \frac{D_{1i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1} - D_{1i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta x} + \frac{D_{2i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1} - D_{2i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\Delta y} + \\ & + C_{1i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}^{n-1} + O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t), \quad (6) \end{aligned}$$

где i, j – индексы, которые изменяются от 1 до $N_1 - 1$ и от 1 до $N_2 - 1$ (N_1, N_2 – количество узлов расчетной сетки по осям Ox и Oy соответственно); Δt – шаг по времени; $\Delta x, \Delta y$ – приращения координат; $O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta t)$ – ошибка указанного порядка относительно шагов интегрирования $\Delta x, \Delta y, \Delta t$.

Схема является маршевой по времени, поэтому приращения координат по пространству и времени выбирались так, чтобы выполнялось условие Куранта [7].

Алгоритм численного решения

Исходные данные составляют граничные параметры, начальные параметры и начальные условия. В качестве граничных параметров используются: u_1 – скорость воды через отверстие; T_1^n, P_1^n, ρ – плотность суммарная; ρ_1 – плотность воды; ρ_2 – плотность воздуха и c_1, c_2 – соответственно, концентрация воды и воздуха. Для каждой узловой точки расчетной области начальные параметры принимаются в зависимости от той среды, в которой расположена точка. Начальные условия для интегрирования системы уравнений (1) записываются для потоков Q, G, F, D_1, D_2 в зависимости от среды, в которой находится точка.

На левой вертикальной границе ставится условие прилипания и постоянства температуры: 1) $u_{0,j} = -u_{1,j}$; 2) $T_{0,j} = 300$ К, кроме точки, соответствующей отверстию при открытии задвижки. На нижней горизонтальной границе ставится условие прилипания и постоянства температуры: 1) $v_{i,0} = -v_{i,1}$; 2) $T_{i,0} = 300$ К. А на верхней границе

ставится условие для невозмущенного потока:

$$V_{i,N_2-1} = V_{i,N_2}, \quad u_{i,N_2-1} = u_{i,N_2}.$$

Вначале, используя исходные данные, интегрируются потоки Q , G , F , D_1 , D_2 в соответствии с (6). А затем по известным потокам находятся соответствующие параметры в каждой расчетной точке, затем по известным компонентам векторов потоков находятся параметры среды.

Таким образом, в статье представлены математическая постановка и алгоритм расчета течения несжимаемой жидкости со свободной поверхностью совместно с газовой фазой.

Библиографические ссылки

1. Богомолов С. В. Метод частиц. Несжимаемая жидкость // Математическое моделирование. – 2003. – Т. 15. – № 1. – С. 46–58.
2. Богомолов С. В., Захаров Е. В., Зеркаль С. В. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 3. – С. 103–116.
3. Якутенок В. А., Борзенко Е. И. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости со сво-

бодной поверхностью на основе метода SIMPLE // Математическое моделирование. – 2007. – Т. 19. – № 3. – С. 52–58.

4. Абдураимов М., Музафаров Х. А., Путтиев А. А. Движение вод в открытых руслах (уравнения Сен – Венана) // Математическое моделирование. – 1998. – Т. 10. – № 6. – С. 97–106.

5. Белов И. А., Исаев С. А., Коробков В. А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. – Л. : Судостроение, 1989. – 256 с.

6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М. : Наука, 1969. – 744 с.

7. Липанов А. М., Кисаров Ю. Ф., Ключников И. Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. – Екатеринбург : Изд-во УрО РАН, 2001. – 162 с.

8. Численное моделирование дозвуковых и сверхзвуковых течений с использованием разностных схем высокого порядка точности / Ю. Ф. Кисаров [и др.] // Материалы международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные вопросы механики». – Хабаровск, 2003. – Т. 1. – С. 143–157.

9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1978. – 736 с.

A. M. Lipanov, member of RAS, Doctor of Technical Sciences, Professor; Institute of Applied Mechanics UB RAS, Izhevsk
N. V. Stepanova, Postgraduate Student, Institute of Applied Mechanics UB RAS, Izhevsk
L. V. Shishkina, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Izhevsk State Technical University

Mathematical Modeling of Gas and Liquid Flow after Partial Dam Destruction – Mathematical Statement of the Problem

Mathematical modeling of gas and liquid flow using Navier-Stokes equations set and finite element method after partial dam destruction is considered.

Key words: Navier – Stokes equations, free-surface flow, surface wave propagation effects.