УДК 519.71

С. Н. Чуканов, доктор технических наук, профессор, Омский филиал Института математики имени С. Л. Соболева СО РАН
Д. В. Ульянов, аспирант, Омский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ*

Предложен метод разложения векторного поля динамической системы, основанный на построении оператора гомотопии. Метод декомпозиции векторного поля динамической системы используется в работе для построения функций Ляпунова систем управления.

Ключевые слова: декомпозиция векторного поля, система управления, функция Ляпунова, декомпозиция Ходжа – Гельмгольца, оператор гомотопии.

В 3-мерной теории поля известно разложение Гельмгольца векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ в области $M \in \mathbb{R}^3$ на безвихревое (потенциальное) поле и бездивергентное (соленоидальное) поле [1, 2]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla\, \varphi(\mathbf{x}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ – векторный потенциал; $\varphi(\mathbf{x})$ – скалярный потенциал. Граничные условия разложения Гельмгольца: векторное поле $\nabla\varphi$ – нормальное к границе ∂M области M, векторное поле $\nabla \times \mathbf{A}$ – касательное к границе ∂M. Градиент потенциальной функции $\nabla\, \varphi(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x})$ является наилучшей аппроксимацией векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Актуальность декомпозиции векторного поля для исследования динамических систем вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ обусловлена тем фактом, что использование скалярной потенциальной компоненты функции $\varphi(\mathbf{x})$ в качестве функции Ляпунова [3, 4] $V(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$ позволяет оценивать устойчивость динамической системы, так как производная функции Ляпунова по времени $\dot{V}(\mathbf{x}) = (\nabla V(\mathbf{x}))^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -(\nabla\varphi(\mathbf{x}))^T \mathbf{f}(\mathbf{x})$ в случае потенциального векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ равна $\dot{V}(\mathbf{x}) = -\|\nabla\varphi(\mathbf{x})\|^2 \le 0$.

Декомпозиция Гельмгольца может быть записана с использованием оператора Ходжа «*» для дифференциальных форм [2, 5]: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = d\varphi(\mathbf{x}) + {*d}\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Однако при $n > 3$ оператор Ходжа *l*-формам сопоставляет *k*-формы со значением $k > 3$, и декомпозиция Ходжа – Гельмгольца некорректна.

Цель настоящей работы – построение алгоритмов декомпозиции векторного поля гладкой динамической системы $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ при $n \ge 3$. Для выполнения цели в работе решена задача построения потенциальной и соленоидальной компонент векторного поля формированием оператора гомотопии для дифференциальной формы, соответствующей векторному полю $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

1. Декомпозиция векторного поля динамической системы. Для динамической системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x});\ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n;\ \ \mathbf{f}(0) = 0, \qquad (1)$$

сформируем векторное поле $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \partial / \partial\mathbf{x}$ и соответствующую дифференциальную форму $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$. Пусть в евклидовом пространстве с координатами $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и метрическим тензором $g_{ij}(\mathbf{x}) = g^{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$ задано векторное поле $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Для соответствующей *l*-формы $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ имеем $\omega_i = \frac{f_i}{\sqrt{g_{ii}}}$, следовательно, $\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i$ [6].

Построим из векторного поля скалярный потенциал применением оператора гомотопии для формы $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{f}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ [7, 12]:

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}) = \int_0^1 i_{x_i \partial/\partial x_i} \boldsymbol{\omega}(\lambda\mathbf{x})\,d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})\,d\lambda. \qquad (2)$$

Оператор гомотопии $\mathbb{H}$ удовлетворяет тождеству $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$. Первый член разложения является точной формой $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = d\left(\int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}(\lambda\mathbf{x})\,d\lambda\right)$, следовательно, является замкнутой формой: $d\boldsymbol{\omega}_e = d(d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega})) = 0$. Если считать $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ скалярным потенциалом, то потенциальное векторное поле $\varphi'_x \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ является дуальным форме $\boldsymbol{\omega}_e = d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \varphi'_x d\mathbf{x}$.

Второй член разложения $\boldsymbol{\omega}_a$ является антиточной формой (по терминологии [7]) $\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_e = \boldsymbol{\omega} - d(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}$, причем $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_a = \mathbb{H}(\mathbb{H}d\boldsymbol{\omega}) = 0$.

Получено 05.09.12
* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-07-00032 и № 11-08-01349).

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $d\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\omega}_a$, так как $dd\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому антиточная форма $\boldsymbol{\omega}_a$ инвариантна по отношению к преобразованию

$$\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}\Omega; \forall\Omega \in \Lambda^2. \quad (3)$$

В случае, когда размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ четная, можно сформировать абсолютный инвариант по отношению к преобразованию (3):

$$I_a = \int\limits_M \left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{n/2} = \int\limits_M \left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{n/2} \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

который является количественной характеристикой антиточной форме на многообразии $M \in \mathbb{R}^n$. Величина I_a не зависит от выбора точной части $\boldsymbol{\omega}_e$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega}_e$.

В случае, когда размерность евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ нечетная, можно сформировать относительный инвариант по отношению к преобразованию (3):

$$I_a = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{n-1/2} = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}_a \left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{n-1/2} \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

так как в соответствии с теоремой Стокса

$$\int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int\limits_M d\left[\boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1}\right] = \int\limits_M d\boldsymbol{\omega}_a \left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^{k-1} = \int\limits_M \left(d\boldsymbol{\omega}_a\right)^k$$

получаем абсолютный инвариант в четномерном пространстве.

Пример 1. Рассмотрим уравнение осциллятора $\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = -x_1$, для которого построим форму $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_a = x_2 dx_1 - x_1 dx_2$; $d\boldsymbol{\omega} = 2dx_1 \wedge dx_2$ на многообразии $M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 \le 1\right\}$. Тогда значение абсолютного инварианта $I_a = \left|\int\limits_M \left(d\boldsymbol{\omega}\right)\right| = \left|\int\limits_M \left(2dx_1 \wedge dx_2\right)\right| = 2\pi.$

Если к форме прибавить точную компоненту $\boldsymbol{\omega} = x_2 dx_1 - x_1 dx_2 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + d\left(x_1^2 + x_2^2 / 2\right) = x_2 dx_1 - x_1 dx_2 + x_1 dx_1 + x_2 dx_2$, что соответствует ДС $\dot{x}_1 = x_2 + x_1; \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$, то значение интеграла не изменится.

Для многообразия M границей является $\partial M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^2 = 1\right\}$. Для нахождения относительного инварианта проведем замену координат: $x_1 = r\cos\theta; x_2 = r\sin\theta$, причем на границе многообразия $r = 1$: $\partial M = \left\{r, \theta \mid r = 1, \theta \in \left[0 \ldots 2\pi\right]\right\}$. Тогда $\boldsymbol{\omega} = r d\theta = d\theta$ и значение относительного инварианта $I_a = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega}\left(d\boldsymbol{\omega}\right)^{k-1} = \int\limits_{\partial M} \boldsymbol{\omega} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \in \mathbb{R}.$ □

Из тождества $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ следует, что $\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}_e$, так как $\mathbb{H}\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} = 0$. Поэтому точная форма $\boldsymbol{\omega}_e$ инвариантна по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\omega} + d\sigma; \forall\sigma \in \Lambda^0\left(x\right)$.

В соответствии с теоремой Гаусса – Остроградского на компактном (замкнутом) односвязном многообразии $M \in \mathbb{R}^n$

$$I_e = \int\limits_M \left(\nabla \cdot \mathbf{X}_e\right) dV_M = \int\limits_{\partial M} \left\langle \mathbf{f}_e, \mathbf{n} \right\rangle dV_{\partial M} \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

где dV_M – элемент объема многообразия M; $dV_{\partial M}$ – элемент объема границы многообразия ∂M; $\mathbf{n}$ – внешний вектор нормали к границе ∂M; $\mathbf{X}_e$ – векторное поле, соответствующее точной компоненте $\boldsymbol{\omega}_e$. Величина I_e не зависит от выбора антиточной части $\boldsymbol{\omega}_a$, поэтому является инвариантной по отношению к калибровке $\boldsymbol{\omega}_a$. В качестве многообразия M можно выбрать многообразие, границей которого является эквипотенциальная гиперповерхность $\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mathrm{const}$.

Пример 2. Для динамической системы $\dot{x}_1 = x_2 + x_1; \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$ построим форму $\boldsymbol{\omega} = \left(x_2 + x_1\right)dx_1 + \left(-x_1 + x_2\right)dx_2 = \boldsymbol{\omega}_a + \boldsymbol{\omega}_e$, причем $\boldsymbol{\omega}_e = d\left(\mathbb{H}\boldsymbol{\omega}\right) = d\left(\int\limits_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{f}\left(\lambda\mathbf{x}\right) \cdot d\lambda\right) = d\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) = x_1 dx_1 + x_2 dx_2$, откуда потенциал следует выбрать в форме $\varphi\left(x_1, x_2\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ и $\mathbf{X}_e = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$; $\nabla \cdot \mathbf{X}_e = 2$.

Построим многообразие M, ограниченное границей ∂M, которая определяется эквипотенциальной поверхностью $\varphi\left(x_1, x_2\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = C$. В соответствии с правой частью теоремы Гаусса – Остроградского $I_e = \int\limits_M \left(\nabla \cdot \mathbf{X}_e\right) dV = 2\int\limits_M dV = 2\pi r^2 = 4\pi C$.

В соответствии с левой частью теоремы Гаусса – Остроградского $I_e = \int\limits_{\partial M} \left\langle \mathbf{f}_e, \mathbf{n} \right\rangle dV_{\partial M}$. Границей является окружность $x_1^2 + x_2^2 = 2C$. Проведем замену координат: $x_1 = r\cos\theta; x_2 = r\sin\theta$, причем $r = \sqrt{2C}$. Тогда $\mathbf{f}_e = \left(r\cos\theta \quad r\sin\theta\right)$; $dV_{\partial M} = r d\theta$; $\mathbf{n} = \left(\cos\theta \quad \sin\theta\right)$, откуда

$$I_e = \int\limits_0^{2\pi} \left\langle \left(r\cos\theta \quad r\sin\theta\right), \left(\cos\theta \quad \sin\theta\right) \right\rangle r d\theta = 4\pi C. \ \square$$

2. Декомпозиция векторного поля динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\mathbf{x}\right) \cdot \mathbf{x}$. В [13] показано, что гладкая динамическая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}\right)$; $\mathbf{f}\left(\mathbf{0}\right) = \mathbf{0}$ может быть представлена в форме $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$. В свою очередь, правая часть выражения $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$ может быть декомпозирована в форме [8] $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{J}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x}$, где $\mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0{,}5 \cdot \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})^T\right)$ – кососимметрическая компонента матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$; $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = 0{,}5 \cdot \left(\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})^T\right)$ – симметрическая компонента матрицы.

Для векторных полей $\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}$ и $\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x} \cdot \partial / \partial \mathbf{x}$ построим соответствующие дифференциальные формы в дуальном базисе: $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{x})d\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}(\mathbf{x})\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$; применим оператор гомотопии для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}$:

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}((\mathbf{J}\mathbf{x})d\mathbf{x}) = \\ = \int_0^1 i_{\mathcal{X}}((\mathbf{J}\lambda\mathbf{x})d\mathbf{x})d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{J}\lambda\mathbf{x} d\lambda = 0.$$

Применив оператор гомотопии для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}$, получим скалярную потенциальную функцию $\varphi(\mathbf{x})$:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}((\mathbf{R}\mathbf{x})d\mathbf{x}) = \\ = \int_0^1 i_{\mathcal{X}}((\mathbf{R}\lambda\mathbf{x})d\mathbf{x})d\lambda = \int_0^1 \mathbf{x}^T \mathbf{R}\lambda\mathbf{x} d\lambda = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{R}\mathbf{x}.$$

Так как $\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}(\mathbf{x})) = 0$, то $\mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})) = \varphi(\mathbf{x})$. Следовательно, потенциальное векторное поле системы $\mathbf{f}_g = \partial \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x})) / \partial \mathbf{x} = \partial \varphi(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x}$. Тангенциальное векторное поле системы $\mathbf{f}_t(\mathbf{x})$ можно представить в форме $\mathbf{f}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{f}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{x}$.

Применим оператор внешнего дифференцирования (exterior differentiation) для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}$: $d\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = d((\mathbf{R}\mathbf{x})d\mathbf{x}) = 0$, и для формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}}$: $d\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}} = d((\mathbf{J}\mathbf{x})d\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} J_{ij} dx_i \wedge x_j = d\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}}$. Компонентам разложения $\boldsymbol{\omega} = d\mathbb{H}\boldsymbol{\omega} + \mathbb{H}d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_a$ можно сопоставить $(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})_e = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}\mathbf{x})d\mathbf{x}$; $(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{A}})_a = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{J}} = (\mathbf{J}\mathbf{x})d\mathbf{x}$.

3. Исследование устойчивости линейных стационарных систем. Для исследования устойчивости линейных стационарных систем вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \sum_i u_i \mathbf{B}_i; \mathbf{x}, \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^n; \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \qquad (7)$$

с обратной связью в форме $\mathbf{u} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ обычно выбирается в качестве функции Ляпунова такая функция $V(\mathbf{x})$ [10] $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x} > 0$; $p_{ii} > 0$; $p_{ij, i \neq j} = 0$; $V(0) = 0$, для которой матрица $\mathbf{K}$ обеспечивает выполнение условий для производной по времени $\dot{V}(\mathbf{x})$: $\dot{V} < 0$ при $|\mathbf{x}| \neq 0$ и $\dot{V} = 0$ при $|\mathbf{x}| = 0$. Однако выполнение условия $\dot{V} < 0$ при $|\mathbf{x}| \neq 0$ ограничивает использование функций Ляпунова для исследования устойчивости диссипативных систем, поэтому в настоящее время известны способы исследования устойчивости построением функций Ляпунова, для которых выполняется слабое условие $\dot{V} \leq 0$ при $|\mathbf{x}| \neq 0$ [3, 4, 11].

Рассмотрим метод построения функции Ляпунова в форме $V(\mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x})$, где потенциал $\varphi(\mathbf{x})$ определяется применением оператора гомотопии $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}}(\mathbf{x}))$ к симметрической компоненте дифференциальной формы $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{R}} = (\mathbf{R}\mathbf{x})d\mathbf{x}$, $\mathbf{R} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)$ соответствующей динамической системы $V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} > 0$, для которой производная по времени равна $\dot{V}(\mathbf{x}) = \langle \dot{\mathbf{x}}, \nabla V \rangle = -\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^T\mathbf{J}\right)\mathbf{x} - (\mathbf{R}\mathbf{x})^T\left(\sum_i u_i \mathbf{B}_i\right)$, так как $\nabla V(\mathbf{x}) = \operatorname{grad}(V(\mathbf{x})) = -\mathbf{R} \cdot \mathbf{x}$, и $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{R} + \mathbf{J}) \cdot \mathbf{x} + \sum_i u_i \mathbf{B}_i$. Однако при $\mathbf{u} = 0; |\mathbf{x}| \neq 0$ условие, предъявляемое к функции Ляпунова $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$, может не выполняться.

Для обеспечения выполнения условия $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ при $|\mathbf{x}| \neq 0$ выберем диссипативное управление в форме [11] $u_i = -\alpha(\mathbf{x})\langle \mathbf{B}_i, \nabla V \rangle = -\alpha(\mathbf{x})(\mathbf{B}_i)^T(\mathbf{R}\mathbf{x})$, где коэффициент $\alpha(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$; $\alpha(\mathbf{x}) > 0$.

Определим требование, налагаемое на $\alpha(\mathbf{x})$, требуемое для обеспечения условия $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ при $|\mathbf{x}| \neq 0$. Предположим, что при $|\mathbf{x}| \neq 0$ $\sum_i \left(\mathbf{B}_i^T \mathbf{R}\mathbf{x}\right)^2 \neq 0$ и $\dim span\left\{\mathbf{B}_i^T\mathbf{R}, \mathbf{B}_i^T\mathbf{R}\mathbf{A}, \ldots, \mathbf{B}_i^T\mathbf{R}\mathbf{A}^{n-1}; i = 1, \ldots, m\right\} = n$, т. е.

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}\mathbf{J}\right)\mathbf{x} - \alpha\sum_i \langle \mathbf{R}\mathbf{x}, \mathbf{B}_i \rangle^2 = \\ = -\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2 + \mathbf{R}\mathbf{J}\right)\mathbf{x} - \alpha\sum_i \left(\mathbf{B}_i^T \mathbf{R}\mathbf{x}\right)^2 < 0. \qquad (8)$$

Неравенство (8) – условие Ляпунова для обеспечения устойчивости системы (7) – выполняется выбором такого значения $\alpha > 0$, что

$$\alpha(\mathbf{x}) > -\frac{\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2+\mathbf{RJ}\right)\mathbf{x}}{\sum_i\left(\mathbf{B}_i{}^T\mathbf{Rx}\right)^2};\ \forall\mathbf{x}\neq 0, \qquad (9)$$

при котором выполняется условие $\dot V(\mathbf{x})<0$ при $\mathbf{x}\neq 0$ и $\dot V(\mathbf{x})=0$ при $|\mathbf{x}|=0$.

Пример 5. Рассмотрим систему (7) с $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -4 & 1 & 6\\ -2 & -4 & 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\end{pmatrix}^T$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T$, для которой получим:

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix};\ \mathbf{J}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ -3 & 0 & 5\\ -3 & -3 & 0\end{pmatrix};$$

$$\dim\ span\left\{\mathbf{B}^T\mathbf{R},\mathbf{B}^T\mathbf{RA},\mathbf{B}^T\mathbf{RA}^2\right\}=3;\ \left(\mathbf{B}^T\mathbf{Rx}\right)^2=9.$$

При $u=0$ значение $\dot V(\mathbf{x})$: $\dot V(\mathbf{x})=-\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2+\mathbf{RJ}\right)\mathbf{x}=5>0,$ то есть условие Ляпунова для $\dot V(\mathbf{x})$ не выполняется. Но при формировании диссипативного управления $u=-\alpha\langle\mathbf{B},\nabla V\rangle$ и выборе $\alpha(\mathbf{x}) > -\frac{\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2+\mathbf{RJ}\right)\mathbf{x}}{\sum_i\left(\mathbf{B}_i{}^T\mathbf{Rx}\right)^2}=\frac{5}{9}$ получим: $\dot V(\mathbf{x})=-\mathbf{x}^T\left(\mathbf{R}^2+\mathbf{RJ}\right)\mathbf{x}-\alpha\sum_i\left(\mathbf{B}_i{}^T\mathbf{Rx}\right)^2<0.$ При $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ $|\mathbf{x}|=0;$ $\dot V(\mathbf{x})=0.$ □

Заключение

В настоящей работе рассмотрен метод декомпозиции векторного поля динамической системы на основе построения оператора гомотопии. Построены инварианты для компонент декомпозиции векторного поля. Метод декомпозиции векторного поля динамической системы может быть использован для построения функций Ляпунова систем с диссипативным управлением.

Библиографические ссылки

1. *Saffman P. G.* Vortex dynamics. – Cambridge University Press. – 1992. – 312 p.
2. *Chukanov S. N.* Definitions of invariants for n-dimensional traced vector fields of dynamic systems // Pattern Recognition and Image Analysis. – Vol. 19. – No 2. – 2009. – P. 303–305.
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М : ГИФМЛ, 1959. – 211 с.
4. *Зубов В. И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение). – М. : Высш. шк., 1984. – 232 с.
5. Multimedia tools for communicating mathematics / ed. K. Polthier, J. Rodrigues. – Springer-Verlag, 2002. – P. 241–264.
6. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики . – М. : Эдиториал УРСС, 2006. – 416 с.
7. *Edelen D. G. B.* Applied Exterior Calculus. – John Wiley&Sons, Inc., 1985. – 472 p.
8. *Wang Y.*, *Lia Ch.*, *Cheng D.* Generalized Hamiltonian realization of time-invariant nonlinear systems // Automatica. – 2003. – Vol. 39. – P. 1437–1443.
9. *Balachandran A. P.*, *Marmo G.*, *Skagerstam B. S.*, *Stern A.* Classical topology and quantum states. – World Scientific, 1991. – 356 p.
10. *Сейдж Э. П.*, *Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. – М. : Радио и связь, 1982. – 392 с.
11. *Jurdjevic V.*, *Quinn J. F.* Controllability and Stability // Journal of Differential Equations. – 1978. – Vol. 28. – P. 381–389.
12. *Hudon N.*, *Hoffner K.*, *Guay M.* Equivalence to Dissipative Hamiltonian Realization. In: Proceedings of the 47-th Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico, 2008. – P. 3163–3168.
13. *Cheng D.*, *Shen T.*, *Tarn T. J.* Pseudo-hamiltonian realization and its application // Communications in information and systems. – 2002. – Vol. 2. – No. 2. – P. 91–120.

S. N. Chukanov, DSc in Engineering, Professor, Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of RAS
D. V. Ulianov, Post-graduate, Omsk State Technical University

Investigation of Control System Stability by Vector Field Decomposition

A method of decomposing the vector field of a dynamical system based on the homotopy operator development is proposed in this paper. The decomposition of the vector field of multi-parameter dynamical system is considered. The invariants are constructed for components of vector field decomposition. The method of decomposition of the dynamical system vector field is applied to develop Lyapunov functions for control systems.

Key words: vector field decomposition, control system, Lyapunov function, Hodge-Helmholtz decomposition, operator of homotopy.