УДК 331.52(519.868)

В. Е. Аверьянов, кандидат физико-математических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
М. Р. Галиахметова, аспирант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ТРУДА

Рассматриваются однородная и структурная модели труда, включающие в себя основные компоненты динамики затрат и воспроизводства в процессе труда. На их основе предлагается эконометрическая модель с использованием системы одновременных уравнений, позволяющая получить количественные соотношения, определяющие динамику количественной меры труда.

Ключевые слова: труд, однородная модель труда, структурная модель труда, эконометрическая модель труда.

Всякая наука проходит три стадии развития: эмпирическую, когда она собирает и накапливает фактическую информацию об изучаемом объекте; теоретическую, когда она стремиться познать сущность, закономерность явления; прогностическую, когда она стремиться заглянуть в будущее и раскрыть перспективы развития изучаемого объекта [1]. Согласно этому положению академика Б. М. Кедрова применительно к экономике труда можно заключить, что она все еще находится на эмпирической стадии развития. «…Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой» [2]. Об этом говорят многие ученные разных времен, разных стран и различных убеждений. Под этим «пользоваться математикой», конечно, не следует понимать только применение математики. Наука достигает совершенства тогда, когда ее основные законы и положения формализованы и на их основе можно прогнозировать.

В экономической литературе имеется, например, бесконечное количество упоминаний о «законе роста производительности труда», но ни один из этих законов не формализован.

Экономическое отношения в производстве и распределении – это трудовые отношения, опосредствованные материальными носителями потребительских свойств. Организация трудовых отношений может быть осуществлена не иначе как путем задания количественной меры труда. Мера труда есть форма проявления величины его производительной силы в этих отношениях.

Производственная система не может надежно и эффективно функционировать, если связи между ее элементами не выражены соответствующей пропорцией производительных сил, как не может действовать никакая машина, если связи между ее частями не определены соотношениям сил, скоростей, ускорений, масс.

Поэтому планирование, основанное на учете, контроле и соизмерении живого и овеществленного труда в производственной системе независимо от того, частное это предприятие или государственное, является необходимым способом определения оптимальных количественных соотношений производительных сил всех ее элементов для получения максимальной производительности труда системы в целом.

Развитие экономики труда, превращение ее в науку, является важнейшей социально-экономической проблемой, решение которой есть объективная закономерность перехода к высшей организации общественного производства.

С учетом вышеизложенного в настоящей работе объективной действительностью является общественное производство, объектом исследования – трудовой процесс в абстрактном виде, а предметом – параметры и показатели трудового процесса и взаимосвязи между ними с точки зрения их формализации в математической модели [3].

Полагаем, что цена труда P есть фиксированная величина (P = const). Обозначим через $L(q)$ количество труда на рынке L от потребности в нем q. Тогда стоимость труда будет равна $PL(q)$.

Пусть часть труда $I(q)$ расходуется на его воспроизводство, т. е. инвестируется в расширение трудовых ресурсов. Тогда

$$I(q) = mPL(q), \quad (1)$$

где m – норма инвестиций (m = const), причем $0 < m < 1$.

Если исходить из предположений о ненасыщенности рынка труда, то в результате увеличения количества труда будет получен его прирост, часть которого опять будет использована для расширения трудовых ресурсов. Это приведет к увеличению скорости роста количества труда, которая будет пропорциональна объему инвестиций:

$$L'(q) = \alpha I(q), \quad (2)$$

где $1/\alpha$ – норма акселерации.

Обозначим $V = \alpha mP$. Тогда выражение (2) после подстановки в него (1) примет вид

$$L' = VL. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3) представляет собой уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, общее решение которого имеет вид

$$L = Ce^{Vq}, \quad (4)$$

где C = const.

Получено 14.09.12

Для придания экономического смысла модели сформулируем начальные условия задачи Коши:

$$L\big|_{q=q_0} = L_0, \tag{5}$$

которые определяют количество труда L_0 при его потребности q_0. Получим частное решение уравнения (3):

$$L = L_0 e^{V(q-q_0)}. \tag{6}$$

График этой функции представлен на рис. 1.

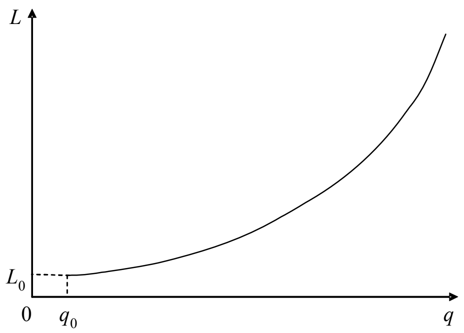

Рис. 1. График функции (6)

Данная модель предполагает опережающий рост количества труда при увеличении его потребности. Недостатком модели является изначальное предположение об избытке труда на рынке, что характерно не для всех состояний экономики.

Рассмотрим модель, в которой с увеличением количества труда его цена падает, т. е. $P = P(L)$ – убывающая функция. Это означает, что $\dfrac{dP}{dL} < 0.$

Тогда из формул (1)–(3) получаем нелинейное дифференциальное уравнение относительно L:

$$L' = \beta P(L) L, \tag{7}$$

где $\beta = \alpha m.$

Поскольку все сомножители в правой части данного уравнения положительны, то $L' > 0,$ т. е. функция $L(q)$ возрастающая.

Характер возрастания функции $L(q)$ определяется ее второй производной $L''.$ Из уравнения (6) получаем:

$$L'' = \beta\left(\frac{dL}{dq}P(L) + L\frac{dP}{dL}\frac{dL}{dq}\right) = \beta\frac{dL}{dq}\left(P(L) + \frac{dP}{dL}L\right). \tag{8}$$

Выражение (8) можно преобразовать, введя эластичность цены труда $Э(P)$:

$$Э(P) = \frac{dL}{dP}\frac{P}{L}. \tag{9}$$

Необходимо учесть, что $Э < 0$, поскольку $\dfrac{dL}{dP} < 0.$

Подставляя выражение (9) в уравнение (8), получаем:

$$L'' = \beta\frac{dL}{dq}P(L)\left(1 - \frac{1}{|Э|}\right). \tag{10}$$

Из уравнения (10) следует, что $L'' > 0$ при эластичности цены $|Э| > 1,$ и график функции $L(q)$ имеет направление выпуклости вниз. Если $L'' < 0,$ при неэластичном спросе на труд $|Э| < 1,$ график функции $L(q)$ имеет выпуклость вверх, что означает замедленный рост и насыщение.

Для простоты рассмотрения примем линейный характер зависимости $P(L)$, что не является принципиальным для качественных выводов модели.

Выберем линейную функцию

$$P(L) = a - bL,\ a > 0,\ b > 0, \tag{11}$$

график которой представлен на рис. 2.

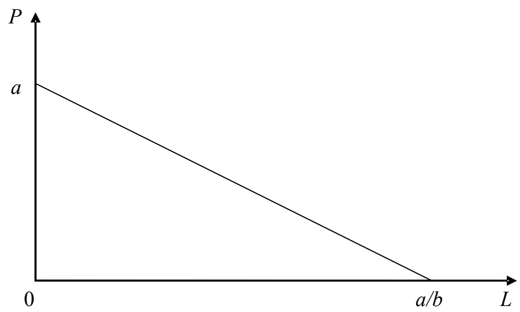

Рис. 2. График функции (11)

Подставляя выражение (11) в уравнение (7), получаем:

$$L' = \beta(a - bL)L, \tag{12}$$

откуда

$$L'' = \beta L'(a - 2bL). \tag{13}$$

После разделения переменных уравнение (12) принимает вид

$$\frac{dL}{\left(\frac{a}{b} - L\right)L} = \beta b\, dq \tag{14}$$

при условии, что $L \neq 0$ и $L \neq \dfrac{a}{b}.$ Необходимо отметить, что $L = 0$ также является решением уравнения (12), но экономического смысла данное решение не имеет.

Выделив полный квадрат в знаменателе левой части уравнения (14), интегрируем его:

$$-\int \frac{dL}{\left(L - \frac{a}{2b}\right)^2 - \left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \beta b \int dq$$

и находим:

$$L = \frac{a}{b\left(1 + C\exp\left(-a\beta q\right)\right)}, \quad (15)$$

где C определяется из начальных условий (5).

Одной из интегральных кривых дифференциального уравнения (12) является логистическая кривая (рис. 3) с параметрами, получаемыми из соотношений (12), (13):

$L' = 0$ при $L = 0$ и при $L = \frac{a}{b}$;

$L'' > 0$ при $L < \frac{a}{2b}$ – график функции имеет выпуклость вниз;

$L'' < 0$ при $L > \frac{a}{2b}$ – график функции имеет выпуклость вверх;

$L = \frac{a}{2b}$ – точка перегиба графика функции.

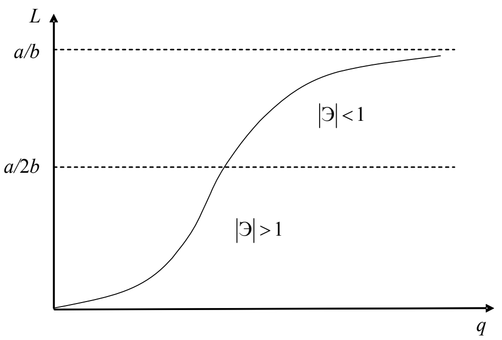

Рис. 3. Интегральная кривая уравнения (12)

Данная модель для такого состояния экономики, когда количество труда на рынке не обеспечивает его потребность.

Обе вышерассмотренные модели представляют труд как однородную систему, которая описывается функцией одной переменной, что не позволяет раскрыть его структурные составляющие.

Структурный подход к рассмотрению сущности труда требует балансовой модели, включающей в себя основные компоненты динамики затрат и воспроизводства в процессе труда.

В структурной модели мы предлагаем следующие элементы труда:

– $\Phi(q)$ – информационная составляющая;

– $E(q)$ – энергетическая составляющая;

– $U(q)$ – инновационная составляющая.

Все эти величины рассматриваются как функции потребности труда (q). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} L(q) = \Phi(q) + E(q) + U(q), & (16.1) \\ \Phi(q) = \lambda(q)L(q) + \gamma(q), & (16.2) \\ E(q) = n(q)L'(q), & (16.3) \end{cases}$$

где $\lambda(q)$ – коэффициент доли информационной составляющей $\left(0 < \lambda(q) < 1\right)$; $\gamma(q)$ – индивидуальная информационная составляющая; $n(q)$ – норма акселерации.

Поясним смысл уравнений, входящих в систему (16). Первое уравнение определяет структуру труда. Второе уравнение описывает информационную составляющую труда, где первое слагаемое этого уравнения определяет необходимый уровень знаний в данной области трудовой деятельности, второе слагаемое определяет индивидуальный образовательный потенциал. Третье уравнение определяет долю инвестиций в воспроизводство и развитие трудового потенциала. Размер инвестиций не может быть произвольным. Он определяется нормой акселерации, которая зависит от уровня технологии.

Полагаем, что функциональные зависимости $\lambda(q), \gamma(q), n(q), U(q)$ известны. Они являются характеристиками функционирования и эволюции системы труда и определяют динамику ее развития.

После подстановки (16.2) и (16.3) в (16.1) получаем неоднородное линейное уравнение первого порядка:

$$L' = \frac{1 - \lambda(q)}{n(q)} L - \frac{\gamma(q) + U(q)}{n(q)}. \quad (17)$$

Полагаем, что параметры системы λ, γ, n – константы. Тогда уравнение (17) упрощается до линейного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$L' = \frac{1 - \lambda}{n} L - \frac{\gamma + U}{n}.$$

Общее решение неоднородного уравнения есть сумма любого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. В качестве частного решения возьмем решение при $L' = 0$, означающее отсутствие прироста труда на рынке и возможность удовлетворения дополнительной потребности в труде только за счет информационной и интеллектуальной составляющих:

$$L_{\text{н.р}} = \frac{\gamma + U}{1 - \lambda}.$$

Точка $L = L_{\text{н.р}}$ представляет собой точку неустойчивого равновесия.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{L} = C\exp\left(\frac{1 - \lambda}{n} q\right).$$

Следовательно, общее решение дается формулой

$$L(q) = \frac{\gamma + U}{1 - \lambda} + C\exp\left(\frac{1 - \lambda}{n} q\right). \quad (18)$$

Интегральные кривые уравнения (18) представлены на рис. 4.

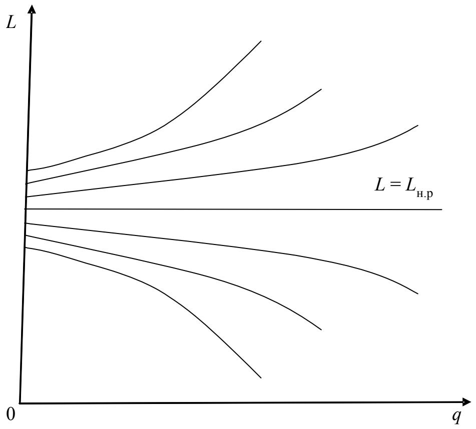

Рис. 4. Интегральные кривые уравнения (18)

Если $L(0) < L_{\text{н.р}}$, то $C = L(0) - L_{\text{н.р}} < 0$, и кривые уходят вниз, т. е. система труда регрессирует. Соответственно, при $L(0) > L_{\text{н.р}}$ $C > 0$, и система труда прогрессирует.

Интерпретируя полученные результаты, можно предположить, что повышение роли интеллектуальной составляющей в системе труда гарантирует положительные темпы развития системы, что подтверждается снижением доли занятости в производственной сфере и положительной динамикой занятости в информационной сфере.

Например, в информационной сфере США занято более 60 % трудоспособного населения, в СНГ – около 40 %. В докладе Бюро трудовой статистики США, подготовленном в 1992 г., анализировалось влияние внедренных информационных и коммуникационных технологий на уровень занятости населения и на объем выпускаемой примышленной продукции, а значит, и на производительность труда:

- в угледобывающей промышленности ежегодно добыча угля возрастает на 3 %, а занятость падает на 1,8 %;
- в станкостроительной отрасли в 1990 г. было занято 330 тыс. чел., а к 2005 г. осталось 14 тыс. чел. Это произошло за счет массового сокращения людей на сборочных линиях, внедрения вместо них роботов и манипуляторов;
- в фармацевтической промышленности будет наблюдаться рост занятости на 1/4 за счет привлечения компьютерных специалистов, программистов, системных аналитиков [4].

Рассмотренные модели позволяют проанализировать динамику развития системы труда с качественной стороны при различных состояниях экономики и определить тенденции ее развития.

Для выявления количественных характеристик, определяющих динамику развития системы труда, целесообразно использовать эконометрический подход.

Для упрощения эконометрическую модель задачи (16) представим в виде системы одновременных уравнений:

$$\begin{cases} L_i = \alpha_0 + \alpha_1\Phi_i + \alpha_2 E_i + \alpha_3 U_i + \varepsilon_i, & (19.1) \\ \Phi_i = \beta_0 + \beta_1\lambda L_i + \beta_2\gamma_i + \nu_i, & (19.2) \\ E_i = \eta U_i, & (19.3) \end{cases}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ – коэффициенты регрессии; ε_i, ν_i – случайные отклонения; η – коэффициент инновационной составляющей в энергетической части.

Подставляя (19.3) в (19.1), получаем:

$$\begin{cases} L_i = \alpha_0 + \alpha_1\Phi_i + \tilde{\alpha}_2 U_i + \varepsilon_i, & (20.1) \\ \Phi_i = \beta_0 + \beta_1\lambda L_i + \beta_2\gamma_i + \nu_i, & (20.2) \end{cases}$$

где $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2\eta + \alpha_3$.

Уравнения (20.1) и (20.2) являются структурными уравнениями модели.

Проведем идентификацию модели:

– первое необходимое условие идентифицируемости

$$(N - n) + (M - m) \geq N - n; \qquad (21)$$

– второе необходимое условие идентифицируемости

$$M - m \geq n - 1, \qquad (22)$$

где N – число эндогенных переменных; M – количество экзогенных переменных; n и m – соответственно, количество эндогенных и экзогенных переменных в уравнениях, проверяемых на идентифицируемость.

Эндогенные переменные L_i и Φ_i. Соответственно, $N = 2$.

Экзогенные переменные U_i и γ_i, т. е. $M = 2$.

Уравнение (20.1) содержит:

– эндогенные переменные L_i и Φ_i, т. е. $n = 2$;

– экзогенную переменную U_i, $m = 1$.

Подставляя эти значения в уравнения (21) и (22), получаем:

$$1 \geq 1 \text{ и } 1 \geq 1.$$

Следовательно, уравнение (20.1) идентифицируемо.

В уравнении (20.2) n = 2, m = 1. Получаем $1 \geq 1$ и $1 \geq 1$. Значит, уравнение (20.2) также определено.

Уравнение (20.2) подставляем в уравнение (20.1):

$$L_i = \alpha_0 + \alpha_1(\beta_0 + \beta_1\lambda L_i + \beta_2\gamma_i + \nu_i) + \tilde{\alpha}_2 U_i + \varepsilon_i;$$
$$L_i - \alpha_i\beta_1\lambda L_i = \alpha_0 + \alpha_{1\beta_0+}\alpha_1\beta_2\gamma_i + \alpha_1\nu_i + \tilde{\alpha}_2 U_i + \varepsilon_i.$$

Обозначим:

$$m = 1 - \alpha_1\beta_1\lambda; \; \sigma_0 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0}{\mu}; \; \sigma_1 = \frac{\alpha_1\beta_2}{\mu};$$

$$s_2 = \frac{\alpha_2}{\mu}; \; \xi_i = \frac{\alpha_i\nu_i + \varepsilon_i}{\mu}.$$

В результате уравнение (20.1) приводится к виду

$$L_i = \sigma_0 + \sigma_1\gamma_i + \sigma_2 U_i + \xi_i. \quad (23)$$

После подстановки выражения (23) в уравнение (20.2) имеем:

$$\Phi_i = \beta_0 + \beta_1\lambda\left(\sigma_0 + \sigma_1\gamma_i + \sigma_2 U_i + \xi_i\right) + \beta_3\gamma_i + \nu_i;$$
$$\Phi_i = \beta_0 + \beta_1\lambda\sigma_0 + \beta_1\lambda\sigma_1\gamma_i + \quad (24)$$
$$+ \beta_1\lambda\sigma_2 U_i + \beta_1\lambda\xi_i + \beta_3\gamma_i + \nu_i.$$

Введем обозначения:

$$\varphi_0 = \beta_0 + \beta_1\lambda\sigma_0,\ \varphi_1 = \beta_1\lambda\sigma_1 + \beta_3,$$
$$\varphi_2 = \beta_1\lambda\sigma_2,\ \chi_i = \beta_1\lambda\xi_i + \nu_i,$$

и выражение (24) примет вид

$$\Phi_i = \varphi_0 + \varphi_1\gamma_i + \varphi_2 U_i + \chi_i.$$

Таким образом, мы получили систему приведенных уравнений

$$\begin{cases} L_i = \sigma_0 + \sigma_1\gamma_i + \sigma_2 U_i + \xi_i\ , \\ \Phi_i = \varphi_0 + \varphi_1\gamma_i + \varphi_2 U_i + \chi_i\ . \end{cases}$$

В левой части данные уравнения содержат только эндогенные переменные, а в правой части – экзогенные переменные и случайные составляющие.

Для приведенных уравнений по методу наименьших квадратов находятся оценки коэффициентов регрессии и на их основе оцениваются параметры структурных уравнений (20.1) и (20.2). То есть определяются количественные значения параметров системы труда, выраженных в удельных весах.

Экспериментальной базой эконометрической задачи (19.1)–(19.3) является матрица экспертных оценок

$$\begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \ldots L_n \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \ldots \Phi_n \\ U_1 & U_2 & U_3 \ldots U_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \cdots \gamma_n \end{pmatrix}.$$

В качестве измерительной шкалы можно выбрать: пологая $L_i = 1$, измеряем все остальные величины в долях таким образом, чтобы их суммы не превышали 1.

Использование современных статистических пакетов прикладных программ позволяет эффективно решать подобные задачи.

Если при изменении параметров системы L_i становится меньше 1, и Φ_i уменьшается, то это означает снижение эффективности труда и, как следствие, увеличение потребности в кадрах. Положительная динамика значений L_i и Φ_i означает рост эффективность труда, что приводит к уменьшению потребности в кадрах и подтверждается динамической моделью (16.1)–(16.3).

Список используемых символов:

P – цена труда;

$L(q)$ – количество труда;

q – потребность в труде;

$I(q)$ – инвестируется в расширение трудовых ресурсов;

m – норма инвестиций;

$1/\alpha$ – норма акселерации;

$Э(P)$ – эластичность цены труда;

a и $b > 0$ – коэффициенты линейной функции $P(L)$;

$\Phi(q)$ – информационная составляющая, отражающая интеллектуальную насыщенность процесса труда;

$E(q)$ – энергетическая составляющая, характеризующая физические затраты труда;

$U(q)$ – инновационная составляющая, раскрывающая уровень используемых технологий;

$\lambda(q)$ – коэффициент доли информационной составляющей $\left(0 < \lambda(q) < 1\right)$;

η – коэффициент инновационной составляющей;

$\gamma(q)$ – индивидуальная информационная составляющая, характеризуемая уровнем образования и квалификации исполнителя;

$n(q)$ – норма акселерации;

α_i, β_i – коэффициенты регрессии;

N, M – число эндогенных и экзогенных переменных соответственно;

ε_i, ν_i – случайные отклонения.

Библиографические ссылки

1. *Кедров Б. М.* История науки и принципы ее исследования // Вопросы философии. – 1971. – № 9. – С. 78, 80.

2. Воспоминания о Марксе и Энгельсе / Институт марксизма-ленинизма при ЦК КПСС. – М. : Госполитиздат, 1956. – С. 66.

3. *Галиахметов Р. А.* Современная информационно-энергетическая теория трудовой деятельности / под ред. И. С. Фотина. – Ижевск : Изд-во Удм. ун-та, 1994. – 169 с.

4. URL: http://www.ssti.ru/kpi/informatika/Content/biblio/b1/inform_man/gl_1_1.htm

V. E. Averyanov, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
M. R. Galiakhmetova, Post-graduate, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Models of Labor System

The paper considers the homogeneous and structural models of labor, which include the main components of cost dynamics and reproduction in the labor process. On their basis, an econometric model is proposed, implying the application of a system of simultaneous equations, allowing to obtain quantitative relationships that define the dynamics of a quantitative measure of labor.

Key words: labor, labor homogeneous model, structural model of labor, econometric model of labor.