МАТЕМАТИКА

УДК 62-93; 519-6

С. Г. Селетков, доктор технических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова
С. С. Иванова, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

НАГЛЯДНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПОТОКОВ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Предложены варианты успешного использования метода контрольных клеток и его модификации – контрольных клеток с делением. Метод опробован при решении задач движения газа по газопроводу, расчете течений в камерах в двух- и трехмерной постановке, решении основной задачи внутренней баллистики и движении воды в открытых водоемах.

Ключевые слова: метод контрольных клеток, система обыкновенных дифференциальных уравнений, движение жидкости, газа, сыпучих материалов.

Хорошо известны и развиты современные численные методы расчета потоков различной природы сплошной среды, в частности: методы характеристик, частиц в ячейках, свободных точек, укрупненных частиц и другие [1, 5], базирующиеся на численном решении дифференциальных уравнений в частных производных. Речь идет о течениях, как в закрытых, так и в открытых пространствах. Заметим, что указанные методы не обладают желаемой степенью доступности, возможно, из-за кажущейся сложности, например, для студентов при желании использовать их в студенческих работах, и, что еще важнее, наглядностью представления выполняемых вычислений, затрудняющих в конечном итоге их применение.

В статье предлагается метод, который в отличии от упомянутых выше существенно проще для понимания, нагляден, поскольку достаточно прост для графической репрезентации, и не сложен для численной реализации в любой языковой среде на обычном компьютере. Он пригоден для расчета практически любых течений, истечений и перетеканий жидкости или газа, в том числе отягощенных диффундирующими примесями и твердыми включениями, которые могут иметь место в технических системах, а также движений, например, сыпучих материалов, схода лавин или селей, ударных волн в атмосфере и других, сопровождающих природные явления.

Идеи метода

Первая. Расчленить изначальный большой объем, в котором рассчитываются параметры состояния среды, мыслимыми, прозрачными для перетекания или, как говорят, контрольными плоскостями или поверхностями на более мелкие объемы – *клетки*, в сумме составляющие изначальный.

Вторая. Отказаться от частных производных, а использовать хорошо известные из университетского курса математики численные методы расчета систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих осредненное состояние среды в ограниченном объеме, а фактически – в одной точке. Иногда такую постановки называют квазистационарной или термодинамической.

Третья. Рассчитывать параметры среды в объеме каждой клетки на основе граничных условий перетекания через контрольные поверхности, разделяющие соседние клетки, и законов сохранения массы и энергии потоков.

Вот основные идеи, заложенные, в частности, в более ранних работах авторов [6–12].

В связи с желанием сделать метод более универсальным и пригодным для расчета процессов в пространствах, изменяющихся по объему в ходе процесса, например, с образованием ударных волн или наличием движущихся перед потоком тел (поршня в камере или пули в стволе), метод получил развитие. Была предложена еще одна идея, которая состояла в предложении ввести операцию деления клетки, непосредственно соприкасающейся с подвижной поверхностью, ограничивающей объем изменяющегося пространства. Такой случай подробнее описан на примере решения основной задачи внутренней баллистики [8]. Ниже приведены примеры использования предлагаемого метода.

Длинный газопровод

Канал длинного газопровода можно условно разбить на *n* контрольных клеток поперечными контрольными сечениями (рис. 1). При этом газопровод не обязательно может быть прямолинейным. В данном примере отдельная клетка будет представлять собой относительно короткий цилиндр.

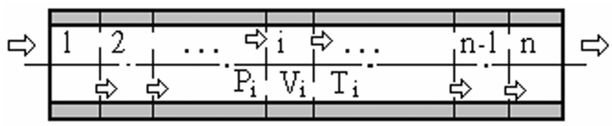


Рис. 1. Схема расчета параметров течения газа в длинном газопроводе

Получено 17.09.12

Параметры течения в каждой клетке определяются количеством внутренней энергии в ее объеме, параметрами потока, входящего в данный контрольный объем и истекающего из него, а также величиной теплоотдачи через твердые границы (стенки газопровода) в соответствии с известными дифференциальными уравнениями:

– сохранения энергии

$$\frac{d\overline{P_i}}{dt} = \frac{k}{W_i}\left(R\overline{T}_{i-1}G_{i-1} - R\overline{T_i}G_i - \frac{k-1}{k}\frac{\nu_T\sigma_T}{R}S_i\overline{P_i} \right),$$

$$i = \overline{2,n}\,; \qquad (1)$$

– сохранения массы:

$$\frac{dm_i}{dt} = G_{i-1} - G_i. \qquad (2)$$

Систему уравнений замыкают уравнения состояния

$$\frac{\overline{P}_i}{\overline{\rho}_i} = R\overline{T}_i \qquad (3)$$

и определения расхода газа через i-ю границу между i – 1-м и i-м контрольными объемами:

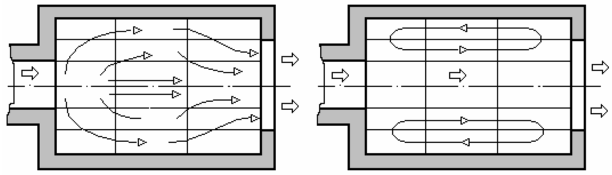
$$G_i = \overline{K}F_i q(\lambda_i)\frac{\overline{P_i}}{\sqrt{R\overline{T}_i}}, \qquad (4)$$

где $\overline{K} = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$; λ_i – безразмерная скорость потока; $\overline{p_i}, \overline{T_i}$ – давление и температура торможения i-м КО; $q(\lambda)$ – газодинамическая функция удельного расхода; k – коэффициент адиабаты; G_i, G_{i+1} – секундные расходы через i, i + 1 поперечные сечения центрального канала и поперечное сечение бокового канала i-го ряда; S_i, F_i – площадь боковой поверхности и площадь поперечного сечения i-го контрольного объема.

В ходе расчетов наблюдалось последовательное без скачков давления наполнение и перетекание газа из одной контрольной клетки в последующую, движение критического сечения по газопроводу к его выходу в период наполнения газопровода и установление «критики» на выходе в стабильную фазу истечения газа из газопровода. Заметим, что использование метода не испытывает затруднений при наличии у газопровода ответвлений, поворотов движения, изменения поперечного сечения или отверстий истечения.

Решение двух- и трехмерных задач

Метод контрольных клеток позволяет решать задачи и большей размерности – в двух- и трехмерной постановке. К двухмерному случаю можно отнести решение о движении газов через релаксационную камеру, имеющую осевые входное и выходное отверстия (рис. 2).



а *б*

Рис. 2. Виды течения газов в релаксационной камере: *а* – фаза начального наполнения камеры; *б* – фаза установившегося течения с циркуляционными потоками

В релаксационную камеру газ втекает из объема *1* (рис. 3). Обратное течение через границы клеток под номерами *1*, *2*, *3*, *4* в расчетах исключалось. Напротив, через другие границы газ, по условиям численного расчета, имел возможность перетекания в прямом и обратном направлении при определенных соотношениях полного и статического давлений в расчетных объемах. В ходе расчета наблюдалось не только последовательное наполнение объемов, но и образование циркуляционного движения газа в клетках под номерами *5*, *6*, *7*, *8*, *9*, *10*.

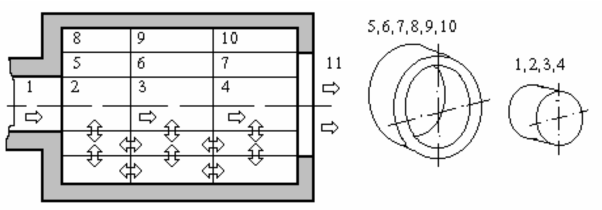


Рис. 3. Расчетная схема течения газов в камере и форма контрольных клеток

Таким образом, метод позволяет учесть тепловые потери потока на циркуляционное движение. Трехмерность решения задачи может быть достигнута при расчленении контрольными поверхностями контрольных объемов в виде кольцевых цилиндров рассматриваемой задачи на сегменты и определении условий окружного течения относительно центральной оси релаксационной камеры. Это дает возможность более эффективно решать задачи, например, с вихревыми течениями газа при учете всех составляющих скорости потока: осевой, тангенциальной и радиальной, что не удавалось в известных решениях [2, 3].

Таким образом, метод контрольных клеток позволяет выполнить переход от «нульмерности» к «многомерности», проследить сложное движение потока в замкнутых пространствах при относительно простых средствах представления и вычислений.

Решение основной задачи внутренней баллистики

В настоящее время решение основной задачи внутренней баллистики (ОЗВБ) перешло в разряд, можно сказать, тестовых с момента ее первого решения Н. Д. Дроздовым в 1903 г. и решается численно. Система обыкновенных дифференциальных уравнений численного решения ОЗВБ в частности приведена в работе [4].

Использование метода контрольных клеток при решении ОЗВБ позволяет рассчитать баллистические характеристики выстрела в реальном времени и в нескольких точках по длине канала ствола, причем количество этих точек может быть произвольным и зависит от целей расчета. При этом известно, что решение ОЗВБ является базовым по отношению к расчету различного рода газовых устройств, использующих в качестве рабочего тела пороховой газ из канала ствола. Это относится и к боковым газоотводным двигателям автоматики. С использованием метода контрольных клеток появляется возможность рассчитать параметры истекающей газопороховой среды непосредственно у газоотводного отверстия, так как эти параметры рассчитываются в соответствующей контрольной клетке, из которой и производится газоотвод.

При решении ОЗВБ метод контрольных клеток получил дальнейшее развитие. В ходе расчетов было установлено, что параметры газа в контрольной клетке, по которой движется пуля, не соответствуют действительным. Вследствие малости объема части клетки за пулей и не подобранного шага по времени могут наблюдаться скачки параметров потока. В сложившейся ситуации было предложено отказаться от предварительной жесткой фиксации элементарных объемов клеток W_i. Удачным решением оказалось деление клетки на две при прохождении пулей объема, соответствующего сумме двух объемов исходных клеток. То есть объем клетки, примыкающий к дну пули, изначально растет до двойного, а затем делится. В этом случае мы уже не имеет клеток с фиксированным объемом, по которым движется пуля (рис. 4).

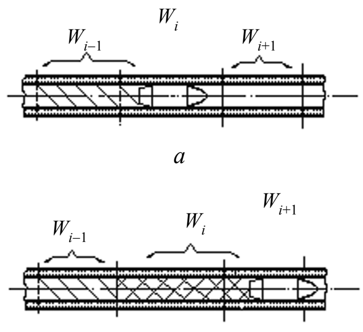


Рис. 4. Схема решения ОЗВБ методом контрольных клеток с делением: *а* – рост клетки W_{i-1}; *б* – обособление клетки W_{i-1} и рост клетки W_i

Использование метода контрольных клеток для решения ОЗВБ, связанного с разделением полного объема канала ствола на элементарные клетки, приводит к определенному изменению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При соблюдении гипотезы Пиобера система уравнений приводится к виду для расчета:

– изменения давления газа в клетке

$$\frac{dP_{0i}}{dt} = \frac{1}{W_i}\left(kRT_{00}\frac{d\left(MG\right)_i}{dt} - \theta\frac{dQ_{Ti}}{dt} - kP_i\frac{dW_i}{dt}KL_i - \right.$$
$$\left. - KG_i kRT_i G_i + KG_{i-1} kRT_{i-1} G_{i-1}\right); \qquad (5)$$

– изменения относительной толщины свода горящего зерна пороха в клетке

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{P_i}{J_K}; \qquad (6)$$

– скорости газообразования в клетке

$$\frac{d(MG)_i}{dt} = \frac{(MZ)_i \gamma_1 (1 + 2\lambda z_i)}{I_k}\frac{dz_i}{dt}; \qquad (7)$$

– изменения массы несгоревшего пороха

$$\frac{d(MZ)_i}{dt} = -\frac{d(MG)_i}{dt}; \qquad (8)$$

– изменения массы газа в клетке

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{d(MG)_i}{dt} - KG_i G_i + KG_{i-1} G_{i-1}; \qquad (9)$$

– изменения объема клетки

$$\frac{dW_i}{dt} = SV_i - \frac{1}{\delta}\frac{d(MZ)_i}{dt} - \alpha\frac{d(MG)_i}{dt}; \qquad (10)$$

– скорости изменения теплоотдачи

$$\frac{dQ_{Ti}}{dt} = 0{,}0155\frac{k}{\theta}K_T\left(\frac{\nu}{d}\right)^{0{,}2} P_i a_i^* \lambda_i (F_T)_i; \qquad (11)$$

– скорости пули

$$\frac{dl_i}{dt} = V_i; \qquad (12)$$

– уравнения движения

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{SP_i}{\phi q}. \qquad (13)$$

Масса газа и масса несгоревшего заряда в начальный момент движения пули находится по формулам:

$$MG_1 = MZ_0 \psi_0;$$

$$MZ_1 = MZ_0 - MG_1.$$

Зависимости при расчете расходов газа между соседними клетками:

– критической скорости

$$a_i^* = \sqrt{\frac{2kRT_{0i}}{k+1}};$$

– критического отношения давлений в сопрягающихся клетках

$$P_{KP} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

– расхода газов при критическом перетекании

$$G(i,i+1) = KG(i,i+1)k_0 S(i,i+1)QL(i,i+1)\frac{P_{0i}}{\sqrt{RT_{0i}}};$$

– расхода газов при докритическом перетекании газов

$$GS(i,i+1) = KS(i,i+1)k_0 S(i,i+1)QL(i,i+1)\frac{P_i}{\sqrt{RT_i}}.$$

Относительная скорость перетекания газа при докритических режимах течения:

$$\lambda(i,i+1) = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}\left[1-\left(\frac{P_{i+1}}{P_{0,i}}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}.$$

Расчет газодинамической функции расхода производится по известной зависимости:

$$QL(i,i+1) = \lambda(i,i+1)\times$$
$$\times\left[1-\left(\frac{k-1}{k+1}\lambda^2(i,i+1)\right)^{\frac{1}{k-1}}\right]\left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Статические параметры потока находятся по формулам:

– давление

$$P_i = P_{0,i}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right)^{\frac{k}{k-1}};$$

– температура

$$T_i = T_{0,i}\left(1-\frac{k-1}{k+1}\lambda_i^2\right).$$

При этом относительная скорость в клетке находится как среднее значение относительных значений скорости на границах клетки:

$$\lambda_i = \frac{\lambda(i,i-1)+\lambda(i,i+1)}{2}.$$

При решении следует учитывать, что длина пути пули складывается из длин проходимых пулей клеток и текущего отрезка части полной длины клетки, которую проходит пуля, а скорость пули рассчитывается при соответствующем переопределении начального значения скорости на границе каждой клетки, что позволяет производить вычисление наращивания скорости пули в каждой последующей клетке.

Открытый водоканал сложной формы

Открытый водоканал сложной формы, рассматривая его в плане, условно можно покрыть равномерной прямоугольной сеткой, которые образуют n контрольных объемов различной глубины в зависимости от рельефа дна водоема (рис. 5). Отдельный контрольный объем может представлять собой параллелепипед прямоугольной формы с высотой равной уровню h_i в конкретной точке водоема.

Параметры перетекания воды в каждом контрольном объеме при плотности воды равной единице определяются в соответствии с известными уравнениями:

– сохранения массы

$$\frac{dm_{ij}}{dt} = \sum\left(S_{n,k}V_{n,k} - S_{i,j}V_{i,j}\right),\ \ n(k) = i(j),\ i(j)-1,\ i(j)+1;$$

– прироста уровня h_{ij} воды в клетке ij

$$\frac{dh_{ij}}{dt} = \frac{1}{S_{ij}}\frac{dm_{ij}}{dt},$$

где $S_{ij} = h_i \cdot \Delta l_i$ – поперечная площадь соответствующей клетки; Δl_i – ширина квадратной клетки.

Система дифференциальных уравнений дополняется уравнением для определения скорости перетекания жидкости между контрольными клетками:

$$V_{ik,jn} = \sqrt{2g\left|h_{ij} - h_{ik,jn}\right|}.$$

Если же нам потребуется составить модель, допустим, распространения каких-либо примесей в объеме пруда, потребуются зависимости, устанавливающие законы их диффузии в воде, что также можно учесть в форме эмпирических зависимостей или обыкновенных дифференциальных уравнений.

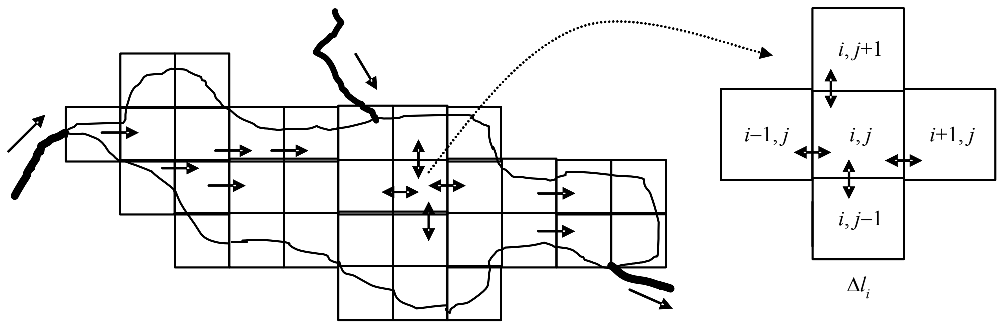


Рис. 5. Схема расчета открытого водохранилища

Заключение

Метод контрольных клеток и его модификация – контрольных клеток с делением – являются достаточно универсальными для исследования течений различной природы. При соответствующем развитии и наполнении системы дифференциальных уравнений для конкретного случая моделирования он может найти применение не только для расчета потоков в простейших узлах газодинамического или гидравлического оборудования, но и в более сложных замкнутых или открытых пространствах, например, при движении воздуха в зданиях и сооружениях, в открытой атмосфере, течений воды в водных системах различного масштаба – от ручейка до океана.

Библиографические ссылки

1. *Белоцерковский О. М.*, *Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. – М. : Наука, 1982. – 392 с.

2. *Дейч М. Е.* Техническая газодинамика. – М. : Энергия, 1974. – 592 с.

3. *Мыльцев Л. П.*, *Ниязов В. Я.* О влиянии закрутки потока на работу сверхзвукового сопла // Сб. статей «Некоторые вопросы исследования вихревого эффекта и его промышленное применение». – Куйбышев : КГУ, 1974. – С. 150–154.

4. *Орлов Б. В.*, *Морозов Ю. Н.*, *Королев А. А.* Материальная часть и основы проектирования артиллерийских систем / под ред. Б. В. Орлова. – М. : ЦНИИинформации, 1974. – 407 с.

5. *Самарский А. А.*, *Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. – М. : Наука, 1975. – 352 с.

6. *Селетков С. Г.* Метод контрольных объемов для расчета массоэнергетических потоков // Моделирование технических систем : сб. науч. трудов. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 1996. – С. 45–49.

7. *Селетков С. Г.* Расчет газоструйных систем методом контрольных объемов // Газоструйные импульсные системы : Сб. ст. В 2 т. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2000. – Т. 1. – С. 98–111.

8. *Селетков С. Г.*, *Люпа А. С.* Решение основной задачи внутренней баллистики методом контрольных клеток с делением // Вестник ИжГТУ. – 2005. – Вып. 2. – С. 14–18.

9. *Селетков С. Г.*, *Палагин Ю. А.* Метод расчета плоских и пространственных газовых течений // Тез. докл. Междунар. науч.-практич. конф. «Проблемы системного обеспечения качества продукции промышленности» (Ижевск, октябрь 1997 г.). – Ижевск : Центр интеллектоемких технологий ИжГТУ, 1997. – С. 50–51.

10. *Селетков С. Г.*, *Палагин Ю. А.* Представление структуры параметров в многомерных задачах газовой динамики // Высшая школа оружейников – городу оружейной славы : юбилейный сб. трудов машиностр. ф-та. – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 1998. – С. 50–52.

11. *Селетков С. Г.*, *Чистяков А. А.*, *Бобылева С. С.* Математическое моделирование уровня воды в открытом канале сложной формы // Материалы науч.-практич. конф. «Высокие технологии в механике» (Ижевск, 15-16 июля 2002 г.). – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2002. – С. 90.

12. Математическое моделирование газопровода / С. Г. Селетков [и др.] // Материалы науч.-практич. конф. «Высокие технологии в механике» (Ижевск, 15-16 июля 2002 г.). – Ижевск : Изд-во ИжГТУ, 2002. – С. 91.

S. G. Seletkov, DSc in Engineering, Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
S. S. Ivanova, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Illustrative Method of Continuum Flow Analysis

The paper proposes versions of successful application of control cell method and its modification – control cells with dividing. The method is tried out when solving problems of gas motion along the gas pipeline when calculating chamber flows in two- and three-dimensional statements and when solving the main problem of internal ballistics and water flow in open reservoirs.

Key words: method of control cells, system of ordinary differential equations, flow of water, gas and granular materials.