УДК 519.22

Е. Г. Плотникова, доктор педагогических наук, профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Пермь
М. В. Радионова, кандидат физико-математических наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Пермь

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ КРИТЕРИЯ СДВИГО-МАСШТАБНОГО ИНВАРИАНТА

Показано использование критерия сдвиго-масштабного инварианта для оценки распределения результатов ЕГЭ по математике абитуриентов, поступивших в 2011 году на первый курс НИУ «ВШЭ», г. Пермь. Методом корреляционного анализа проведено исследование зависимости результатов вступительных экзаменов и балов по различным математическим дисциплинам.

Ключевые слова: статистический анализ, нормальное распределение, критерий сдвиго-масштабного инварианта, корреляционный анализ.

Наиболее распространенным распределением, используемым при изучении случайных процессов, является нормальный закон. На предположении нормальности построены классические методы регрессионного, дисперсионного и факторного анализов. Широкая область применения такого закона объясняется тем, что предпосылки, лежащие в его основе, соответствуют физической сущности многих явлений, а предположение о нормальности существенно упрощает решение многих вопросов, зависящих от свойств распределений. Поэтому при статистическом анализе реальных результатов наблюдений прежде всего проверяют их соответствие нормальному закону распределения. Существует множество разнообразных критериев проверки, каждый из которых имеет различные условия применимости [1].

В работе [2] предложен новый критерий проверки нормальности данных, основанный на сдвиго-масштабных инвариантах. Показано, что при небольших объемах выборки критерий сдвиго-масштабного инварианта является во многих случаях наиболее мощным критерием проверки гипотезы нормальности. В работе [3] этот критерий применен к анализу реальных данных синдромокомплексов в дифференциальной диагностике желтухи, а также для идентификации распределений структурных параметров моделей размеров зерен микроструктур композиционных материалов с зернистой структурой.

В настоящей работе критерий сдвиго-масштабного инварианта использован для анализа результатов ЕГЭ по математике выпускников 2011 года в г. Перми, вступительных экзаменов абитуриентов в НИУ «ВШЭ», г. Пермь, а также к анализу результатов их обучения математическим дисциплинам за 2011/12 учебный год.

Рассмотрим более подробно процедуру проверки статистических гипотез о виде закона распределения совокупности. Для фиксированного момента времени распределение отдельного параметра X представляется выборочными случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В общем случае закон распределения F параметров X неизвестен и возникает вопрос его определения.

Задача согласия экспериментальных данных выбранной модели может быть сформулирована следующим образом: по независимым наблюдениям $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из генеральной совокупности с неизвестной функцией распределения $F(x)$ требуется вынести суждение о том, принадлежат ли они к распределению заданного типа, т. е. проверить гипотезу $H_0 : F(x) = F_0(x,\theta)$, где $F_0(x,\theta)$ – заданная (теоретическая) функция распределения с параметром (или параметрами) θ, или отдать предпочтение альтернативному предположению $H_1 : F(x) \neq F_0(x,\theta)$.

Процедуры, предназначенные для решения задачи согласия, получили название критериев согласия – это определяющие правила, согласно которым по результатам наблюдений принимается решение в задаче статистической проверки гипотез. Самым распространенным критерием согласия является критерий хи-квадрат, который реализован во многих статистических пакетах прикладных программ.

Критерий сдвиго-масштабного инварианта основан на том, что независимая повторная выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (n кратно 3) из генеральной совокупности X с функцией распределения F преобразуется в выборку инвариантов:

$$U_1 = \frac{|X_2 - X_1|}{|X_3 - X_2|},\ U_2 = \frac{|X_5 - X_4|}{|X_6 - X_5|}, \ldots,$$
$$U_k = \frac{|X_{k-1} - X_{k-2}|}{|X_k - X_{k-1}|},\ k = \frac{n}{3}. \quad (1)$$

Распределение каждого из инвариантов U_i не зависит от параметров сдвига – масштаба распределения случайной величины X, а зависит только от функции распределения F.

Основная идея метода состоит в следующем: вместо сложной гипотезы H_0 проверяется простая гипотеза $H_0^G : F(u) = G_0(u)$, где $G_0(u)$ – теорети-

Получено 02.10.12

ская функция распределения инварианта; вместо сложной конкурирующей гипотезы H_1 проверяется простая гипотеза $H_1^G : F(u) \neq G_0(u)$.

Проверка гипотезы согласия данных нормальному закону распределения осуществляется в следующем порядке:

1) исходную выборку $X_1, X_2, \ldots, X_n$ преобразовать в выборку инвариантов $U_1, U_2, \ldots, U_k$, $k = \dfrac{n}{3}$ по (1);

2) выборку инвариантов $U_1, U_2, \ldots, U_k$ упорядочить по возрастанию;

3) найти значение статистики критерия $L = L(U_1, U_2, ..., U_k) = \dfrac{\prod_{i=1}^{k} g_1(U_i)}{\prod_{i=1}^{k} g_0(U_i)}$, где в качестве $g_0(u_i)$ и $g_1(u_i)$ выступают плотности инвариантов, соответствующие гипотезам H_0^G и H_1^G;

4) найти критическое значение статистик критерия $L(\alpha)$ с уровнем значимости α (мы брали эмпирические квантили [3]);

5) если $L < L(\alpha)$, то гипотезу H_0^G следует принять.

В работе [4] выполнен статистический анализ результатов ЕГЭ по математике 2009 г. в регионах Российской Федерации, показано, что в целом распределение баллов не стремится к нормальному, является асимметричным и значимо различным для разных регионов.

Нами проанализированы данные результатов ЕГЭ по математике 4332 выпускников школ г. Перми за 2011 г. Распределение результатов представлено на рис. 1.

Как видно из рисунка, распределение баллов ЕГЭ по математике не является нормальным распределением, имеет видимую асимметрию, что подтверждает выводы работы [4]. По своей сути это распределение является дискретным, так как результаты ЕГЭ распределены по 38 значениям. Средний балл по ЕГЭ составил 51,66 со среднеквадратичным отклонением равным 17,65.

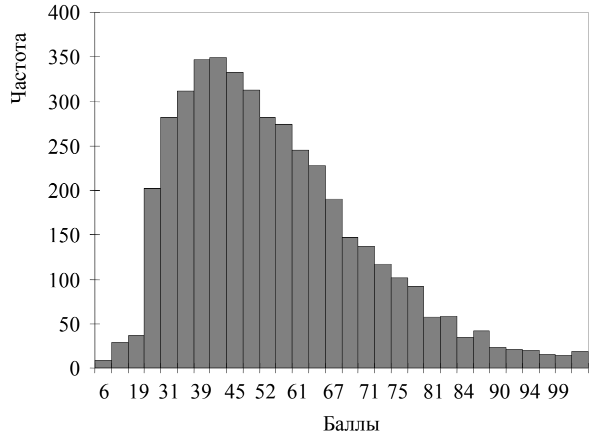


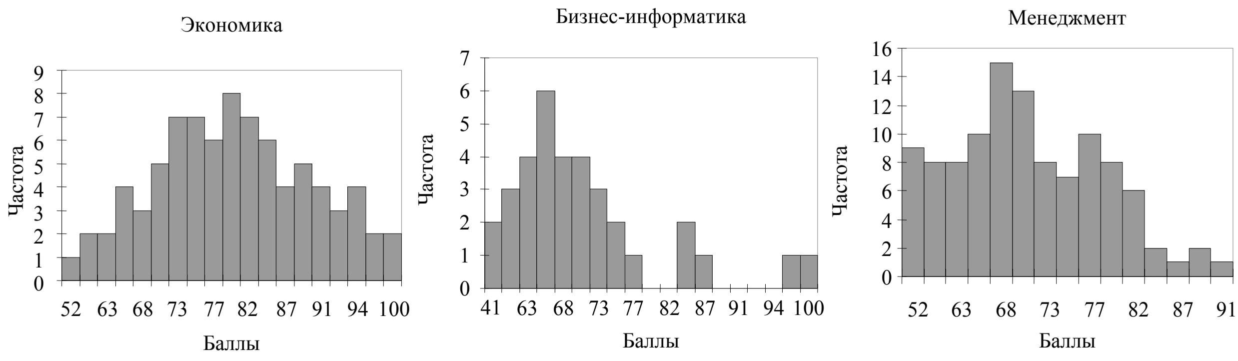
Рис. 1. Распределение результатов ЕГЭ по математике в г. Перми в 2011 г.

Таблица 1. **Результаты ЕГЭ по математике абитуриентов, зачисленных на 1-й курс НИУ «ВШЭ», г. Пермь, 2011 г.**

Факультет	Количество зачисленных абитуриентов	Средний балл	Средне-квадратичное отклонение
Менеджмент	107	69,3	10,4
Бизнес-информатика	34	68,6	12,3
Экономика	82	77,8	11,3

Также нами были проанализированы баллы абитуриентов, зачисленных на 1-й курс НИУ «ВШЭ», г. Пермь. Оказалось, что средний балл ЕГЭ по математике поступивших значительно превысил средний балл по г. Перми (см. табл. 1). Первичный анализ баллов позволил нам выдвинуть гипотезу о нормальном характере их распределения.

Результаты ЕГЭ по математике абитуриентов, зачисленных в НИУ «ВШЭ», г. Пермь в 2011 г. на 1-й курс, имеют распределения, представленные на рис. 2.



а *б* *в*

Рис. 2. Гистограммы распределения результатов ЕГЭ по математике абитуриентов, поступивших в 2011 г. в НИУ «ВШЭ», г. Пермь, на факультет экономики (*а*), бизнес-информатики (*б*) и менеджмента (*в*)

Несмотря на то, что распределения являются дискретными, мы попытались их аппроксимировать нормальным распределением. Для этого применили критерий сдвиго-масштабного инварианта. Результаты проверки показали, что баллы ЕГЭ по математике абитуриентов, поступивших на 1-й курс НИУ «ВШЭ» в 2011 г., согласуются с нормальным распределением на уровне значимости 0,05. Гипотеза о нормальном распределении нашла подтверждение, что позволило применить различные стандартные статистические процедуры, основанные на нормальном законе.

Для оценки качества обучения выполнен корреляционный анализ результатов ЕГЭ по математике и результатов обучения математическим дисциплинам за 2011/12 учебный год. Вычислены парные коэффициенты корреляции (табл. 2). Анализ показывает, что наблюдается прямая сильная зависимость между результатами ЕГЭ по математике и результатами по математическим дисциплинам у студентов факультета «Экономика и бизнес-информатика», в то время как на факультете «Менеджмент» эта зависимость существенно ниже. Этот результат вполне закономерен, поскольку абитуриенты, выбирающие факультет «Менеджмент», в большей степени гуманитарии, а самое главное заключается в том, что количество часов, отведенное на математические дисциплины на этом факультете, по нашему мнению, недостаточно для качественного освоения дисциплин.

Таблица 2. **Коэффициенты корреляции результатов ЕГЭ по математике и результатов экзаменов по математическим дисциплинам в НИУ «ВШЭ», г. Пермь**

Дисциплины	Факультет		
	Экономика	Бизнес-информатика	Менеджмент
Математический анализ	0,687	0,769	0,482
Линейная алгебра	0,638	0,765	0,368
Теория вероятностей и математическая статистика	–	–	0,385

Кроме того нам был интересен характер взаимосвязи между результатами по математическим дисциплинам. Анализ показал, что между экзаменационными баллами по различным математическим дисциплинам у студентов 1-го курса также наблюдается высокая зависимость. Так, на факультете «Экономика» результаты студентов 1-го курса по математическому анализу сильно коррелируют с результатами по линейной алгебре (коэффициент корреляции 0,739). У студентов факультета «Бизнес-информатика» коэффициент корреляции между баллами, полученными студентами по этим же дисциплинам, оказался равен 0,889, что говорит об очень высокой взаимосвязи. Даже на факультете «Менеджмент» корреляция между баллами по математическому анализу и линейной алгебре составила 0,739, между баллами по математическому анализу и теории вероятностей – 0,646, между баллами по линейной алгебре и теории вероятностей – 0,629. Все коэффициенты корреляции положительны, что говорит о прямой взаимосвязи между математическими дисциплинами.

В заключение отметим, что анализ результатов обучения полезен преподавателям любых дисциплин вуза. В данной работе мы постарались показать, что критерий сдвиго-масштабного инварианта позволит выполнить его при небольшом объеме исходных статистических данных.

Библиографические ссылки

1. *Большев Л. Н.*, *Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. – М. : Наука, 1983. – 416 с.

2. *Радионова М. В.* Критерий сдвиго-масштабного инварианта для проверки нормальности данных // Вестник ИжГТУ. – 2009. – № 1(41). – С. 144–146.

3. *Радионова М. В.* Математические методы статистического анализа случайных показателей, имеющих распределение, отличное от нормального. – Пермь : Перм. ун-т, 2011. – 145 с.

4. *Макаров А. А.*, *Симонова Г. И.* К задаче классификации регионов РФ по результатам ЕГЭ по математике // Статистические методы оценивания и проверки гипотез : межвуз. сб. науч. тр. – Пермь : Перм. ун-т, 2010. – № 22. – С. 24–34.

E. G. Plotnikova, Doctor of Education, Professor, Higher School of Economics, National Research University, Perm
M. V. Radionova, PhD (Physics and Mathematics), Higher School of Economics, National Research University, Perm

Statistical Analysis of Learning Outcomes Based on Shift-scale Invariant Criterion

The paper illustrates the application of the shift-scale invariant criterion to estimate the distribution of results in mathematics exam for applicants who entered the first year of Perm HSE NRU in 2011. The method of correlation analysis was applied to investigate the dependence of entrance exam results and scores in various mathematical subjects.

Key words: statistical analysis, normal distribution, shift-scale invariant criterion, correlation analysis.