

УДК 519.63

А. И. Короткий, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург

Ю. В. Стародубцева, аспирант, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

РЕКОНСТРУКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ РЕАКЦИИ – КОНВЕКЦИИ – ДИФФУЗИИ*

Рассматривается задача реконструкции граничных режимов в модели реакции – конвекции – диффузии. Для решения задачи предлагается воспользоваться модификациями методов Ландвебера, Ньютона – Канторовича и Левенберга – Марквардта. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению граничных режимов различной степени гладкости. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: обратная граничная задача, регуляризация, итерационные методы.

Рассматривается задача реконструкции граничных режимов в модели реакции – конвекции – диффузии [1, 2]. Данная задача относится к классу обратных граничных задач [2–4] и является некорректной [2–6].

Рассматриваемые модели реакции – конвекции – диффузии часто используются при исследовании различных гидродинамических процессов [1, 2], в частности, при описании процессов распространения примесей в атмосфере и водоемах, при моделировании загрязнения грунтовых вод [2, 7], при описании диффузии электрически заряженных примесей в твердом теле (такие процессы играют важную роль в микроэлектронике [2]).

Постановка задачи

В некоторой области рассматривается установившееся распределение температуры (концентрации) в неоднородной среде, находящейся под воздействием некоторых внешних факторов.

Математическая модель распределения температуры (концентрации) описывается следующей краевой задачей:

$$\operatorname{div}(k \nabla T) = (\vec{u}, \nabla T) + qT, \quad x \in \Omega,$$

$$T = v, \quad x \in \Gamma_0; \quad T = f, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = w, \quad x \in \Gamma_2,$$

где $\Omega \subset R^2$; $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega$; $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$; $\Gamma_0 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$; $\operatorname{mes} \Gamma_0 > 0$; $\operatorname{mes} \Gamma_1 > 0$; k – коэффициент теплопроводности (диффузии); T – температура (концентрация); $\vec{u}$ – скорость движения среды; q – скорость реакции.

Свяжем с краевой задачей оператор

$$A: v \rightarrow k \frac{\partial T_v}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T_v – решение краевой задачи, соответствующее граничному режиму $T = v$ на Γ_0 .

На границе Γ_0 граничный режим $T = v$ неизвестен, а на границе Γ_1 проводятся дополнительные измерения $k \frac{\partial T}{\partial n} = \varphi$. Обратная задача состоит в восстановлении неизвестного режима $T = v$ на границе

Γ_0 по данным $T = f$, $k \frac{\partial T}{\partial n} = \varphi$ на границе Γ_1 и

данным $k \frac{\partial T}{\partial n} = w$ на границе Γ_2 .

Обратная задача сводится к решению операторного уравнения

$$A(v) = \varphi.$$

Методы решения задачи

Обратная граничная задача является вообще говоря некорректной [3–6]. Для ее решения предлагается воспользоваться модификациями методов Ландвебера [3, 7], Ньютона – Канторовича [7] и Левенберга – Марквардта [7].

Модифицируем метод Ландвебера введением весового коэффициента $\alpha_k > 0$ и регуляризующей добавки $\beta_k v_k$, $\beta_k > 0$. Тогда итерационный процесс метода будет осуществляться по следующей формуле:

$$v_{k+1} = v_k - \alpha_k A'(v_k)^* (A(v_k) - \varphi) - \beta_k v_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A'(v_k)$ – производная Фреше оператора A в точке v_k ; $A'(v_k)^*$ – сопряженный оператор к оператору $A'(v_k)$. Оператор $A'(v_k)$ действует следующим образом:

$$A'(v_k): h \rightarrow k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1},$$

где T – решение вспомогательной краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \nabla T) = (\vec{u}, \nabla T) + qT, \quad x \in \Omega,$$

$$T = h, \quad x \in \Gamma_0,$$

$$T = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad k \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2.$$

Оператор $A'(v_k)^*$ действует следующим образом:

$$A'(v_k)^*: \psi \rightarrow k \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0},$$

где ω – решение вспомогательной краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \nabla \omega) = -(\vec{u}, \nabla \omega) + q\omega, \quad x \in \Omega,$$

$$\omega = \psi, \quad x \in \Gamma_1,$$

$$\omega = 0, \quad x \in \Gamma_0; \quad k \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2.$$

Модифицируем метод Ньютона – Канторовича введением весового коэффициента $\beta_k > 0$ и регуляризацией оператора $[A'(v_k)]^{-1}$. Тогда итерационный процесс метода будет осуществляться по следующей формуле:

$$v_{k+1} = v_k - \beta_k [A'(v_k)]_{\alpha}^{-1} (A(v_k) - \varphi), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_k > 0$ – параметр регуляризации, оператор $[A'(v_k)]_{\alpha}^{-1}$ действует следующим образом:

$$[A'(v_k)]_{\alpha}^{-1}: \psi \rightarrow T_{(\alpha)} \Big|_{\Gamma_0},$$

где $T_{(\alpha)}$ – решение вспомогательной краевой задачи

$$\operatorname{div}(k \nabla T_{(\alpha)}) = (\vec{u}, \nabla T_{(\alpha)}) + qT_{(\alpha)} + \alpha \frac{\partial^2 T_{(\alpha)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad x \in \Omega,$$

$$T_{(\alpha)} = 0, \quad x \in \Gamma_1; \quad k \frac{\partial T_{(\alpha)}}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$k \frac{\partial T_{(\alpha)}}{\partial n} = \psi, \quad x \in \Gamma_1.$$

Модифицируем метод Левенберга – Марквардта введением весового коэффициента $\beta_k > 0$. Тогда итерационный процесс метода будет осуществляться по формуле

$$v_{k+1} = v_k - \beta_k [A'(v_k)^* A'(v_k) + \alpha_k E]^{-1} A'(v_k)^* (A(v_k) - \varphi),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\alpha_k > 0$ – параметр регуляризации метода.

Параметры регуляризации α_k и β_k выбираются на каждом шаге итерации так, чтобы минимизировать норму невязки $\|A(v_{k+1}) - \varphi\|$.

Численное моделирование

Были проведены вычислительные эксперименты по восстановлению граничных режимов в рассматриваемой обратной задаче модифицированными методами Ландвебера, Ньютона – Канторовича и Левенберга – Марквардта.

В расчетах фиксировались параметры:

$$\Omega = (0; 1) \times (0; 1), \quad \Gamma_0 = \{(x_1, 0): 0 \leq x_1 \leq 1\},$$

$$\Gamma_1 = \{(x_1, 1): 0 \leq x_1 \leq 1\},$$

$$\Gamma_2 = \{(0, x_2) \cup (1, x_2): 0 \leq x_2 \leq 1\}, \quad k = 1, \quad q = 0, 1,$$

$$f = 0, \quad w = 0, \quad v_0 = 0,$$

$$\vec{u} = (x_1(1-x_1)\sin(2\pi x_1)(1-2x_2-2\pi\cos(2\pi x_2)), \\ -x_2(1-x_2)\sin(2\pi x_2)(1-2x_1-2\pi\cos(2\pi x_1))).$$

В качестве модельных примеров были рассмотрены примеры со следующими тремя граничными режимами.

Пример 1: гладкий режим

$$v_1(x_1) = \cos(2\pi x_1), \quad x_1 \in [0; 1].$$

Пример 2: непрерывный кусочно-гладкий режим

$$v_2(x_1) = |\cos(\pi x_1)|, \quad x_1 \in [0; 1].$$

Пример 3: разрывный режим

$$v_3(x_1) = \begin{cases} 0,5, & x_1 \in [0; 0,1), \\ x_1 + 0,4, & x_1 \in [0,1; 0,5), \\ 0,9 - x_1, & x_1 \in [0,5; 0,9], \\ 0, & x_1 \in (0,9; 1]. \end{cases}$$

На рис. 1–9 приведены результаты расчетов модифицированными методами Ландвебера, Ньютона – Канторовича и Левенберга – Марквардта.

На рисунках на графиках слева представлены результаты восстановления (штрихпунктирная линия – промежуточная итерация (номер справа от графика), пунктирная линия – конечная итерация (номер справа от графика) и сплошная линия – точное решение, вертикальная ось – ось Ov , горизонтальная ось – ось Ox_1); на графиках в центре показаны изменения нормы невязки (вертикальная ось – значение невязки, горизонтальная ось – номер итерации); на графиках справа отражены зависимости относительной погрешности $\varepsilon(k) = \|v_k - v\|/\|v\|$ (вертикальная ось – значение относительной погрешности, горизонтальная ось – номер итерации).

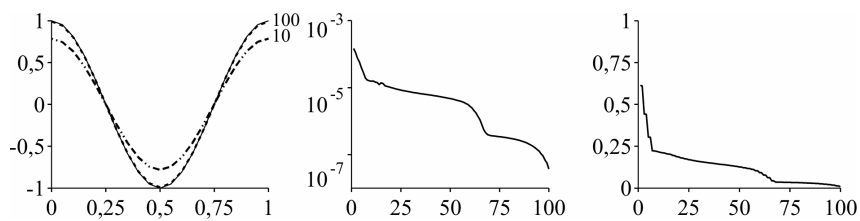


Рис. 1. Пример 1: метод Ландвебера

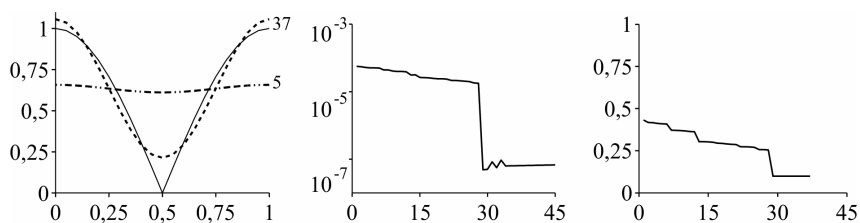


Рис. 2. Пример 2: метод Ландвебера

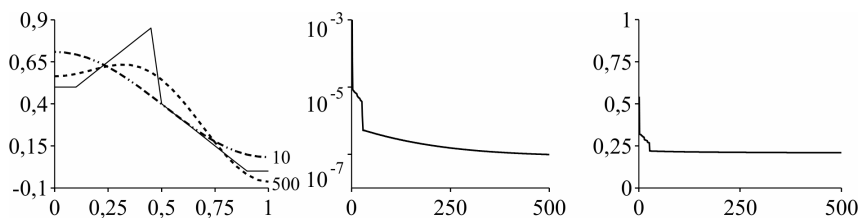


Рис. 3. Пример 3: метод Ландвебера

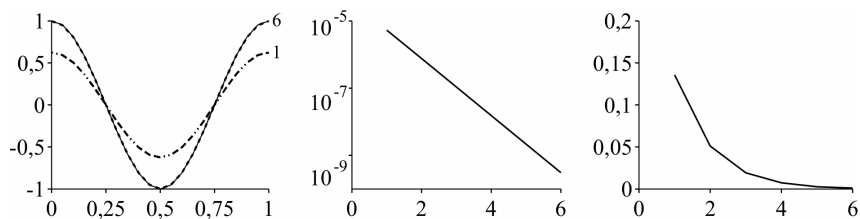


Рис. 4. Пример 1: метод Ньютона – Канторовича

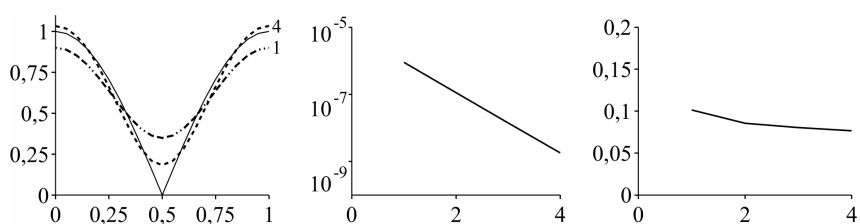


Рис. 5. Пример 2: метод Ньютона – Канторовича

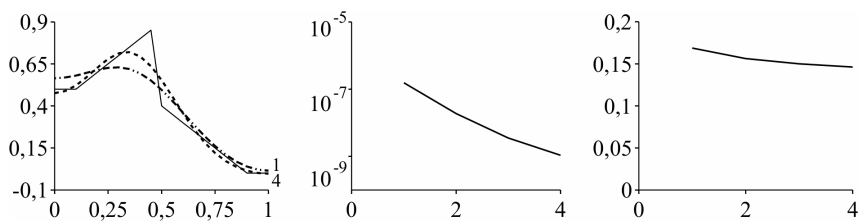


Рис. 6. Пример 3: метод Ньютона – Канторовича

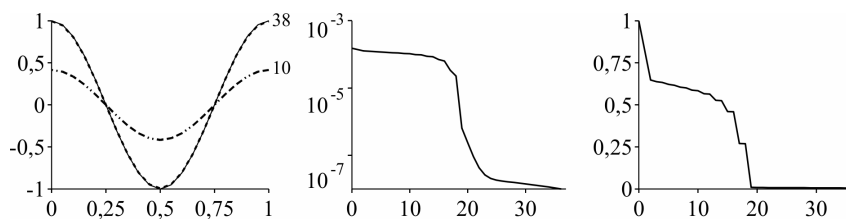


Рис. 7. Пример 1: метод Левенберга – Марквардта

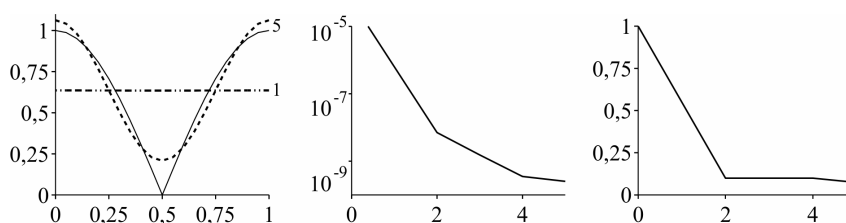


Рис. 8. Пример 2: метод Левенберга – Марквардта

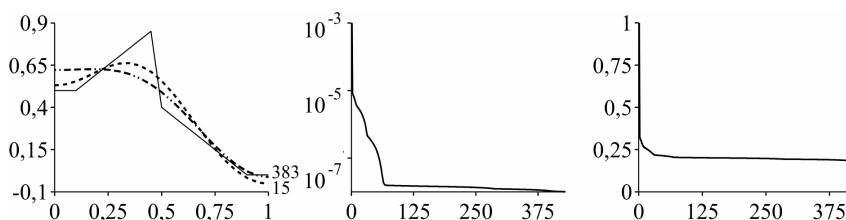


Рис. 9. Пример 3: метод Левенберга – Марквардта

Заключение

Приведена математическая постановка обратной граничной задачи для модели реакции – конвекции – диффузии. Для решения задачи предложены модификации регуляризованных методов Ландвебера, Ньютона – Канторовича и Левенберга – Марквардта. Проведено численное моделирование.

Полученные результаты показывают, что гладкие режимы восстанавливаются предложенными модифицированными методами с хорошей точностью. Непрерывные кусочно-гладкие и разрывные режимы точнее восстанавливаются модифицированными методами Ньютона – Канторовича и Левенберга – Марквардта. По количеству итераций, требуемых на восстановление граничного режима, модифицированный метод Ньютона – Канторовича показал лучшие результаты.

Библиографические ссылки

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. – М. : УРСС, 2003. – 784 с.
2. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. – М. : УРСС, 2004. – 478 с.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск : Сибирское научное изд-во, 2009. – 457 с.
4. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М. : Наука, 1980. – 286 с.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1986. – 320 с.
6. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
7. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М. : Наука, 1982. – 320 с.
8. Васин В. В., Еремин И. И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа : Теория и приложения. – Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 210 с.

A. I. Korotkii, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics and Mechanics named after N. N. Krasovsky, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg

Yu. V. Starodubtseva, Post-graduate, The Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg

Reconstruction of Boundary Regimes in the Model of Reaction – Convection – Diffusion

The problem of reconstruction of the boundary regimes in the model of reaction – convection – diffusion is considered. Modified methods of Landweber, Newton-Kantorovich and Levenberg-Marquardt are proposed to solve this problem. Numerical experiments on reconstruction of boundary regimes for various degrees of smoothness are carried out. The results of numerical modeling are presented.

Key words: inverse boundary problem, regularization, iterative methods.