

УДК 338.27; 519.216.3

К. В. Кетова, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Е. В. Касаткина, кандидат физико-математических наук, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

Д. Д. Насридинова, магистрант, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

Представлен сравнительный анализ различных методов социально-экономического прогнозирования на краткосрочный период. Анализ проведен на основе статистических ежемесячных данных об объемах государственного инвестирования в человеческий капитал Удмуртской Республики с января 2001 г. по декабрь 2012 г.

Ключевые слова: инвестиции, регрессионные модели, авторегрессионные модели и модели скользящего среднего, метод главных компонент, искусственные нейронные сети.

Одним из ключевых элементов динамичного развития экономики региона являются инвестиции в человеческий капитал. Инвестиции в человеческий капитал необходимо анализировать и прогнозировать, поскольку они влияют на динамику макроэкономических показателей экономической системы [1]. В качестве инвестиций в человеческий капитал J , как правило, рассматривают вложения в его составляющие: образование J_1 , здравоохранение J_2 и культуру J_3 [2].

В работе представлены результаты краткосрочного прогнозирования динамики объемов государственного инвестирования в составляющие человеческого капитала региональной экономической системы, выполненного на основе статистических ежемесячных данных для Удмуртской Республики (УР) с января 2001 года по декабрь 2012 года [3] в сопоставимых ценах.

Для предсказания временных последовательностей необходимо представить поведение процесса в виде математической модели y_t^{mod} , которая может быть распространена на будущее. Прогнозирование объемов инвестирования в человеческий капитал в работе будем осуществлять с помощью регрессионных моделей, авторегрессионных моделей и моделей скользящего среднего, метода главных компонент, а также искусственных нейронных сетей.

В **регрессионных моделях** инвестиционный процесс задается в виде некоторой функции от времени $y_t^{\text{mod}} = f(t)$. В работе рассмотрены следующие виды функций:

– линейная модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot (t - t_0); \quad (1)$$

– квадратичная модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot (t - t_0) + b_2 \cdot (t - t_0)^2; \quad (2)$$

– кубическая модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot (t - t_0) + b_2 \cdot (t - t_0)^2 + b_3 \cdot (t - t_0)^3; \quad (3)$$

– гиперболическая модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 + \frac{b_1}{t - t_0}; \quad (4)$$

– логарифмическая модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 + b_1 \cdot \ln(t - t_0); \quad (5)$$

– экспоненциальная модель:

$$y_t^{\text{mod}} = b_0 e^{b_1 \cdot (t - t_0)}; \quad (6)$$

– логистическая модель:

$$y_t^{\text{mod}} = -\frac{y_{\max} - y_{\min}}{e^{b_0 + b_1 \cdot (t - t_0)} + 1} + y_{\max}. \quad (7)$$

Здесь t_0 – начальный момент времени; y_t – значение уровня ряда в момент времени t ; b_0, b_1, b_2, b_3 – оцениваемые параметры модели.

Оценка параметров моделей регрессионных уравнений (1)–(7) осуществляется методом наименьших квадратов [4].

При прогнозировании на основе **авторегрессионных моделей и моделей скользящего среднего** (ARMA-модели) подразумевается, что текущее значение временного ряда y_t зависит от предыдущих значений $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$, которые выступают в качестве объясняющих переменных, а также учитываются ошибки $\varepsilon, \varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ [4]:

$$y_t^{\text{mod}} = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot y_{t-1} + \dots + \gamma_p \cdot y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \cdot \varepsilon_t - \dots - \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}, \quad (8)$$

где p – порядок авторегрессионного процесса $AR(p)$; q – порядок модели скользящего среднего $MA(q)$; $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p, \theta_1, \dots, \theta_q\}$ – оцениваемые по методу максимального правдоподобия параметры модели [4].

Для определения порядков p и q ARMA-модели используются автокорреляционная функция (АС) и частная автокорреляционная функция (ПАС).

Для прогнозирования объемов инвестиций используется также **метод главных компонент** (МГК), который заключается в реализации приведенной ниже последовательности.

Шаг 1. По временному ряду формируется матрица Y и задается лаг τ ($\tau = 2, 3, \dots, N - 1$):

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{N-\tau+1} \\ y_2 & y_3 & \dots & y_{N-\tau+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_\tau & y_{\tau+1} & \dots & y_N \end{bmatrix} = [\bar{y}^1 \quad \bar{y}^2 \quad \dots \quad \bar{y}^m], \quad (9)$$

где $m = N - \tau + 1$.

Шаг 2. Строится матрица $C = Y Y^T \frac{1}{m}$ и определяются ее собственные значения h_j и собственные вектора u^j .

Шаг 3. Формируется система линейных алгебраических уравнений, которая решается относительно h_j , ($j = \bar{1}; \tau - 1$):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^r u_1^j h_j = y_{N-\tau+2}, \\ \dots \quad r = \tau - 1. \\ \sum_{j=1}^r u_{\tau-1}^j h_j = y_N; \end{cases} \quad (10)$$

Шаг 4. Осуществляется построение продолжения временного ряда y_{N+1} по формуле

$$y_{N+1} \approx \sum_{j=1}^r u_\tau^{(r-j)} h_j. \quad (11)$$

Шаг 5. Полученное значение y_{N+1} добавляется в исходную числовую последовательность и для расчета дальнейших прогнозных значений алгоритм повторяется до тех пор, пока не будет выполнен прогноз на весь необходимый интервал времени.

Одним из распространенных методов прогнозирования является использование **искусственных нейронных сетей** (ИНС). Обучение ИНС, как правило, осуществляется методом обратного распространения ошибок, алгоритм которого подробно представлен в работе [5]. Для прогнозирования инвестиционных процессов использовалась трехслойная нейронная сеть, структура которой надстраивалась генетическим алгоритмом [6]. Поскольку нет необходимости иметь модель, которая представляла бы очень давние наблюдения, так как они, скорее всего, не характеризуют настоящий момент, поэтому в ИНС (аналогично МГК) используют показатель временного запаздывания τ , который определяет, какие из показателей в прошлом оказывают большее влияние на настоящее его значение.

Для выбора адекватной модели прогнозирования объемов государственного инвестирования в человеческий капитал исходная база статистических данных была разделена на обучающее Ω^{learn} и тестовое Ω^{test} множества (участок ретропрогноза).

Для оценки качества ретропрогнозов и выбора наилучшей для краткосрочного прогнозирования модели рассчитывались следующие показатели:

– среднеквадратичная ошибка:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N^{test}} (y_t - y_t^{mod})^2}{N^{test} - 1}}, \quad t \in \Omega^{test};$$

– коэффициент корреляции расчетных и статистических значений моделируемого показателя:

$$r = \frac{\sum_{t=1}^{N^{test}} (y_t - \bar{y})(y_t^{mod} - \bar{y}^{mod})}{N^{test} S_y S_{y^{mod}}},$$

где $S_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N^{test}} (y_t - \bar{y})^2}{N^{test} - 1}}$, $S_{y^{mod}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N^{test}} (y_t^{mod} - \bar{y}^{mod})^2}{N^{test} - 1}}$;

$t \in \Omega^{test}$;

– средняя относительная погрешность:

$$\bar{\delta} = \frac{1}{N^{test}} \sum_{t=1}^{N^{test}} \left| \frac{y_t - y_t^{mod}}{y_t} \right| \cdot 100\%, \quad t \in \Omega^{test}.$$

Здесь N^{test} – количество элементов в Ω^{test} ; N^{learn} – количество элементов в Ω^{learn} ; y_t^{mod} – значение уровня ряда в момент времени t , рассчитанное по модели; \bar{y}^{mod} – среднее значение уровня ряда, рассчитанное по модели.

Обучающим множеством для построения модели прогнозирования инвестиций в человеческий капитал УР являлось множество $\Omega^{learn} = \{01.2001, 02.2001, \dots, 12.2009\}$. Ретропрогноз по математической модели построен на тестовом множестве $\Omega^{test} = \{01.2010, 02.2010, \dots, 12.2012\}$, где $N^{test} = 36$.

Выберем модель для прогнозирования **инвестиций в образование** Удмуртской Республики на краткосрочную перспективу. В табл. 1 приведены показатели оценки качества ретропрогноза, полученные для **регрессионных моделей**.

Среди регрессионных моделей наилучший ретропрогноз получаем с помощью гиперболической модели (см. табл. 1). На рис. 1 показаны данные по величине инвестиций в образование УР за рассматриваемый период, а также приведен график гиперболической модели за период ретропрогноза.

Для прогнозирования экономических показателей с помощью **авторегрессионных моделей и моделей скользящего среднего** первоначально с использованием программного продукта Eviews строим авто-

корреляционную и частную автокорреляционную функцию значений инвестиций в образование и их первых разностей. Исходя из графиков данных функций (см. рис. 2, а, б) определяем порядки ARMA-моделей (см. табл. 2).

Из табл. 2 видно, что среди ARMA-моделей наилучший ретропрогноз получается с помощью модели № 11, график которой приведен на рис. 3.

Результаты ретропрогноза, полученные методом главных компонент с различными лагами, представлены в табл. 3. График модели с минимальной отно-

сительной погрешностью на участке ретропрогноза, построенной с помощью МГК, приведен на рис. 4.

Для прогнозирования объемов инвестиций в образование УР обучена искусственная нейронная сеть. В табл. 4 приведены результаты ретропрогноза инвестиций в образование УР по обученной ИНС с различными лагами.

График модели, построенной с помощью обученной ИНС, обладающей минимальной относительной погрешностью на участке ретропрогноза, приведен на рис. 5.

Таблица 1. Показатели оценки качества ретропрогноза инвестиций в образование УР по регрессионным моделям

Регрессионная модель	σ	r	$\bar{\delta}$	R^2
Линейная модель	518465,37	0,29	33,62	0,23*
Квадратичная модель	546907,46	0,30	38,17	0,23*
Кубическая модель	590669,15	0,31	43,42	0,23*
Гиперболическая модель	562055,34	0,27	25,77	0,07*
Логарифмическая модель	508566,30	0,28	26,46	0,19*
Экспоненциальная модель	518145,95	0,30	34,05	0,19*
Логистическая модель	803081,44	0,28	62,14	0,03

* – модель значима на уровне значимости $\alpha = 0,05$;
 R^2 – коэффициент детерминации, рассчитанный на обучающем множестве Ω^{learn} .

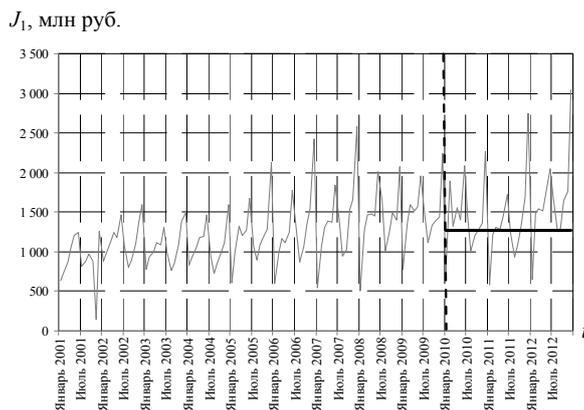


Рис. 1. Динамика инвестиций в образование УР и график гиперболической модели

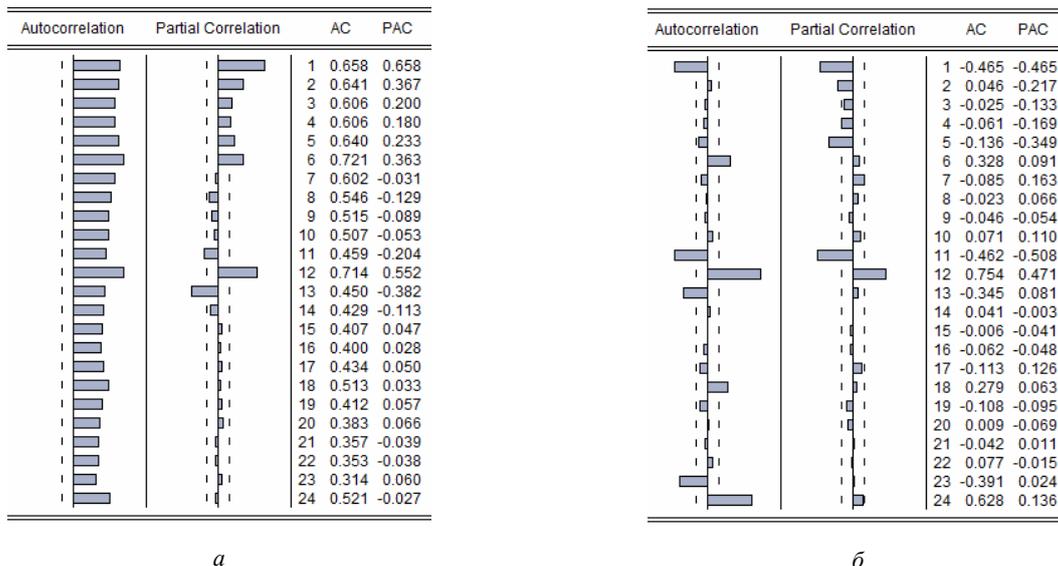


Рис. 2. Автокорреляционная функция значений инвестиций в образование (а) и их первых разностей (б)

Таблица 2. Показатели оценки качества ретропрогноза инвестиций в образование УР по ARMA-моделям

ARMA-модель	σ	r	$\bar{\delta}$	R^2
AR(1)	1019781,51	0,14	53,54	0,50**
AR(1) MA(1)	1409278,08	-0,29	84,99	0,66**
AR(1) AR(2) MA(1)	1403731,11	-0,29	84,54	0,65**
AR(1) AR(2) MA(1) MA(2)	1380653,82	0,36	84,89	0,68**
AR(1) AR(2) AR(3) MA(1) MA(2)	602191,92	0,28	28,12	0,74**
AR(1) AR(2) AR(3) AR(4) AR(5) MA(1) MA(2)	653162,36	0,56	31,89	0,79**
AR(1) AR(2) AR(3) AR(4) AR(5) MA(1) MA(2) MA(5)	569130,62	0,45	27,68	0,81**
AR(1) AR(6) MA(1)	603331,26	0,28	28,19	0,78**
AR(1) AR(6) MA(1) MA(2) MA(6)	1256756,44	0,63	76,95	0,82**
AR(6) AR(12) MA(1) MA(6)	542103,54	0,42	25,63	0,93**
AR(6) AR(12) AR(24) MA(12) MA(6)	539835,36	0,61	25,16	0,93**
AR(6) AR(12) AR(24) AR(23) MA(12) MA(6)	523824,25	0,72	26,37	0,93**

** – модель значима на уровне значимости $\alpha = 0,01$.

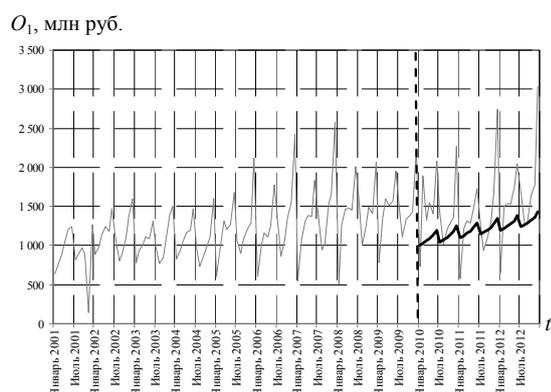


Рис. 3. Динамика инвестиций в образование УР и график ARMA-модели № 11 из табл. 2

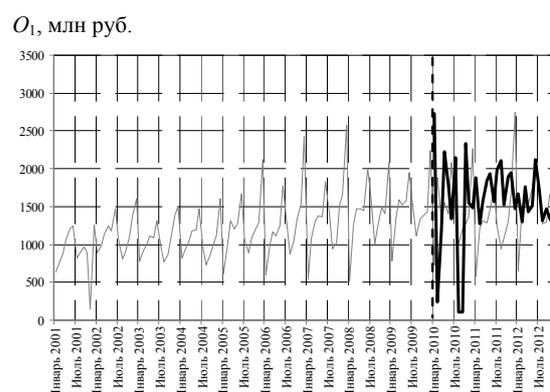


Рис. 4. Динамика инвестиций в образование УР и график модели МГК с лагом 6

Таблица 3. Показатели оценки качества ретропрогноза инвестиций в образование УР по моделям, построенным МГК

Модель	σ	r	$\bar{\delta}$
Модель МГК с лагом 2	600185,52	0,18	38,99
Модель МГК с лагом 3	690389,73	0,12	39,36
Модель МГК с лагом 4	718017,32	0,11	43,26
Модель МГК с лагом 5	811023,09	-0,07	136,94
Модель МГК с лагом 6	565677,29	0,60	26,98
Модель МГК с лагом 7	826540,27	-0,11	142,36
Модель МГК с лагом 8	941047,02	0,18	52,71
Модель МГК с лагом 9	920563,52	0,10	64,21
Модель МГК с лагом 10	952470,57	0,11	86,12
Модель МГК с лагом 11	985490,46	0,07	89,17
Модель МГК с лагом 12	602410,56	0,26	36,36
Модель МГК с лагом 24	810733,08	-0,09	178,32
Модель МГК с лагом 36	1112258,36	0,08	279,67
Модель МГК с лагом 48	2332229,72	-0,01	517,26

На основании проведенного анализа получено, что наиболее подходящей моделью для прогнозирования инвестиций в образование УР является модель, построенная с помощью обученной нейронной сети с лагом $\tau = 12$. Точность нейронной сети, обученной по ежемесячным данным 2001–2012 годов, составляет 1,0 %. Прогноз на краткосрочный период (2013–2016 годы) инвестиций в образование УР приведен на рис. 6.

Аналогичным образом, как и для прогнозирования инвестиций в образование, осуществляем выбор

Таблица 4. Показатели оценки качества ретропрогноза инвестиций в образование УР по обученной нейронной сети

Модель	σ	r	$\bar{\delta}$
Модель ИНС с лагом 2	653167,33	0,16	33,32
Модель ИНС с лагом 3	787646,21	-0,07	46,49
Модель ИНС с лагом 4	743587,38	0,64	41,09
Модель ИНС с лагом 5	848142,81	0,08	44,36
Модель ИНС с лагом 6	851232,11	0,19	47,69
Модель ИНС с лагом 7	876241,87	0,07	53,17
Модель ИНС с лагом 8	915278,03	0,14	57,32
Модель ИНС с лагом 9	975012,07	0,37	54,12
Модель ИНС с лагом 10	888142,32	-0,07	46,15
Модель ИНС с лагом 11	784321,95	0,24	47,13
Модель ИНС с лагом 12	580960,67	0,34	21,68
Модель ИНС с лагом 24	468013,12	0,64	26,41
Модель ИНС с лагом 36	513521,16	0,42	31,13
Модель ИНС с лагом 48	554667,19	0,54	31,19

лучшей модели для прогнозирования объемов *инвестиций в здравоохранение* $J_2(t)$ и *культуру* $J_3(t)$ УР. Сравнительный анализ различных методов краткосрочного прогнозирования показал, что и в этих случаях наилучшей с точки зрения качества ретропрогнозов является модель искусственной нейронной сети.

На рис. 7 представлены результаты краткосрочного прогнозирования инвестиций в здравоохранение и культуру УР, полученные с помощью обученной нейронной сети с лагом $\tau = 12$.

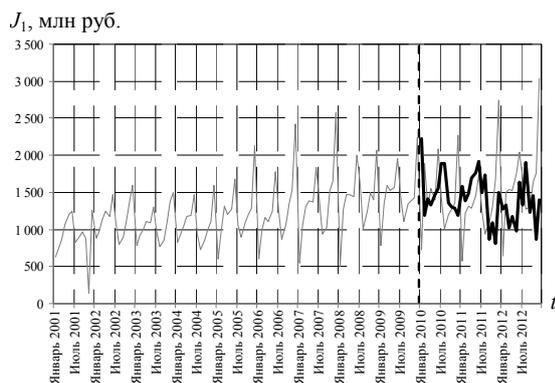


Рис. 5. Динамика инвестиций в образование УР и график модели, построенной с помощью ИНС с лагом 12

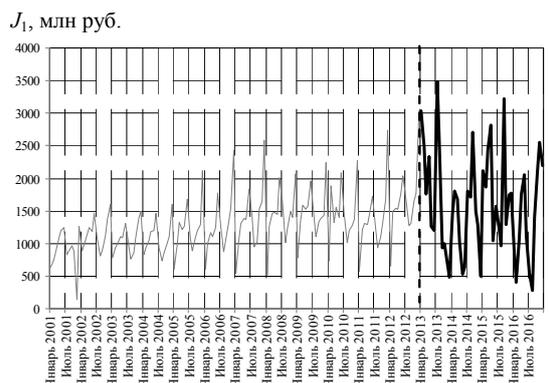
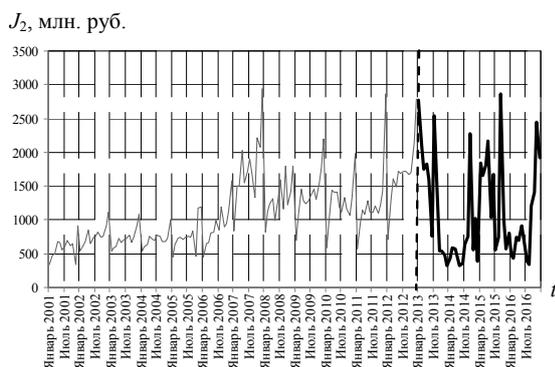
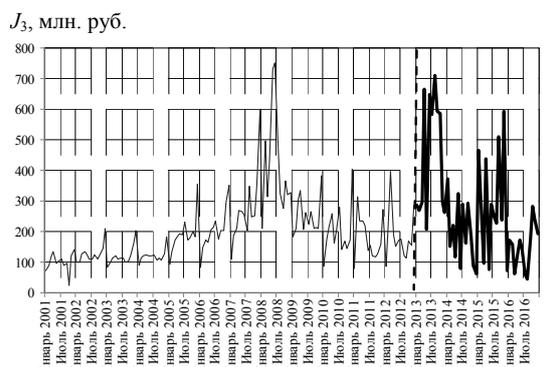


Рис. 6. Динамика инвестиций в образование УР с 2001 по 2012 год и их прогноз на 2013–2016 годы



а



б

Рис. 7. Динамика инвестиций в здравоохранение УР (а) и культуру УР (б) с 2001 по 2012 год и их прогноз на 2013–2016 годы

Таким образом, результаты исследований показали, что лучшим инструментом при моделировании и прогнозировании инвестиционных процессов в важные составляющие человеческого капитала региональной системы (образование, здравоохранение, культура) являются искусственные нейронные сети. Они дают наименьшую ошибку, сглаживают труднообъяснимые колебания показателей экономической системы, которые могут быть вызваны различного рода факторами, а также обладают свойством воссоздавать невидимые математические связи, которые невозможно выявить в исходных данных с использованием традиционных математических моделей.

Библиографические ссылки

1. Кетова К. В., Русяк И. Г. Идентификация и прогнозирование обобщающих показателей развития региональ-

ной экономической системы // Прикладная эконометрика. – 2009. – № 3. – С. 56–71.

2. Кетова К. В., Русяк И. Г. Экономико-математическая модель анализа и прогноза фактора человеческого капитала // Экономика, статистика, информатика : Вестник УМО. – 2007. – № 2. – С. 56–60.

3. Отчетность об исполнении консолидированного бюджета РФ, Министерство финансов Российской Федерации, Федеральное казначейство (Казначейство России). – URL: <http://www.goskazna.ru> (дата обращения: 30.03.2012).

4. Магнус Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика : Начальный курс. – М. : Дело, 2004. – 576 с.

5. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы / пер. с польск. И. Д. Рудинского. – М. : Горячая линия – Телеком, 2006. – 452 с.

6. Цой Ю. Р., Спицын В. Г. Эволюционный подход к настройке и обучению искусственных нейронных сетей // Электронный журнал «Нейроинформатика». – 2006. – Т. 1. – № 1. – С. 34–61.

K. V. Ketova, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

E. V. Kasatkina, PhD (Physics and Mathematics), Kalashnikov Izhevsk State Technical University

D. D. Nasridinova, Master's degree student, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Forecasting the Dynamics of Investment Processes

The article presents a comparative analysis of various methods for socio-economic short-period forecasting. The analysis is based on monthly statistical data on volume of government investment in human capital of Udmurt Republic from January 2001 to December 2012.

Key words: investments, regression models, autoregressive models and moving-average models, method of principal components, artificial neural networks.