

УДК 533.6.071.4

М. М. Горохов, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

А. В. Корепанов, кандидат физико-математических наук, доцент, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

В. А. Тенев, доктор физико-математических наук, профессор, Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ОКОЛО ПОВЕРХНОСТЕЙ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

Представлена методика численного расчета параметров турбулентных течений около поверхностей с произвольной геометрией поверхности и апробация методики на решении задачи обтекания сферы при числах Рейнольдса $Re = 1 \dots 10^6$.

Ключевые слова: турбулентность, численное моделирование.

При проведении расчетов параметров течений около поверхностей со сложной геометрией (рис. 1) поверхность помещается внутрь области интегрирования Σ цилиндрической формы (рис. 2). Область разбивается плоскостями σ , ориентированными в направлении вектора скорости, и на каждой из плоскостей строится криволинейная конечно-разностная сетка в соответствии с методом [1]. Особенностью такой сетки является то, что на плоскости σ сетка ортогональна, а совокупность сеток в области интегрирования Σ (рис. 3) ортогональной не является, поскольку для этого не было предпринято специальных мер. В частности, построенная по такому алгоритму сетка не удовлетворяет условиям ортогональности $\nabla\xi \cdot \nabla\zeta = 0$, $\nabla\eta \cdot \nabla\zeta = 0$, поэтому

постановку задачи необходимо проводить в системе координат общего вида (ξ, η, ζ) .

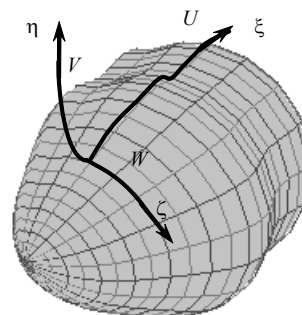


Рис. 1. Ориентация координатных осей

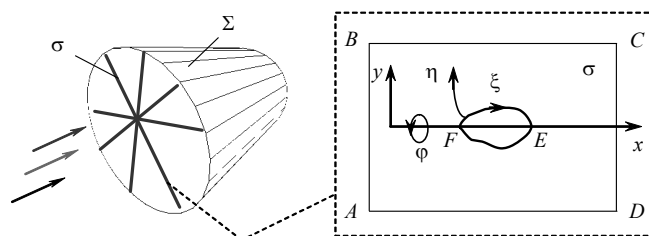


Рис. 2. Область численного интегрирования:

a – дефрагментация области; *б* – ориентация координатных осей на секущих плоскостях

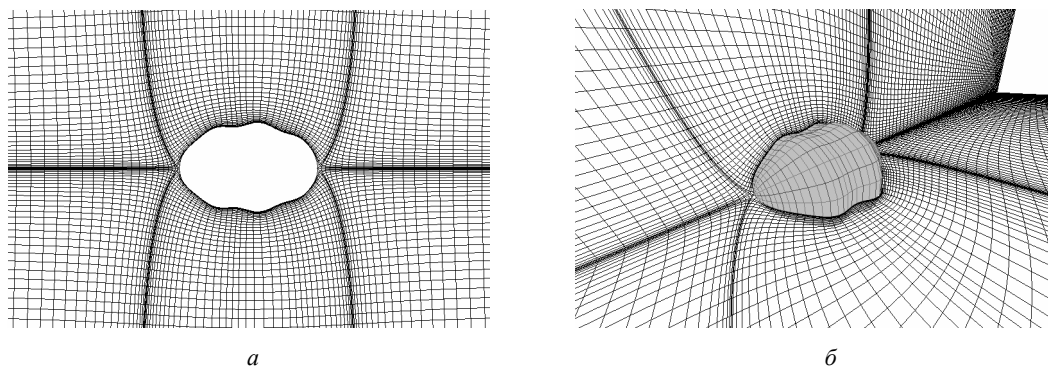


Рис. 3. Вид конечно-разностной сетки, предназначенной для расчета параметров течения около поверхности со сложной геометрией

Уравнения вязкого течения в системе координат (ξ, η, ζ) (рис. 1) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \zeta} = \mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{b}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{b}_3}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{u} = J \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e} = J \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u - \mu \varphi_{11} u_\xi \\ \rho U v - \mu \varphi_{11} v_\xi \\ \rho U w - \mu \varphi_{11} w_\xi \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{f} = J \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u - \mu \varphi_{22} u_\eta \\ \rho V v - \mu \varphi_{22} v_\eta \\ \rho V w - \mu \varphi_{22} w_\eta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{g} = J \begin{pmatrix} \rho W \\ \rho W u - \mu \varphi_{33} u_\zeta \\ \rho W v - \mu \varphi_{33} v_\zeta \\ \rho W w - \mu \varphi_{33} w_\zeta \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{p} = -J \begin{pmatrix} 0 \\ p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\zeta \zeta_x \\ p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\zeta \zeta_y \\ p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\zeta \zeta_z \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_1 = \mu J \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{12} u_\eta + \varphi_{13} u_\zeta + \alpha_{11} \xi_x + \alpha_{12} \eta_x + \alpha_{13} \zeta_x \\ \varphi_{12} v_\eta + \varphi_{13} v_\zeta + \alpha_{11} \xi_y + \alpha_{12} \eta_y + \alpha_{13} \zeta_y \\ \varphi_{12} w_\eta + \varphi_{13} w_\zeta + \alpha_{11} \xi_z + \alpha_{12} \eta_z + \alpha_{13} \zeta_z \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_2 = \mu J \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{21} u_\xi + \varphi_{23} u_\zeta + \alpha_{21} \xi_x + \alpha_{22} \eta_x + \alpha_{23} \zeta_x \\ \varphi_{21} v_\xi + \varphi_{23} v_\zeta + \alpha_{21} \xi_y + \alpha_{22} \eta_y + \alpha_{23} \zeta_y \\ \varphi_{21} w_\xi + \varphi_{23} w_\zeta + \alpha_{21} \xi_z + \alpha_{22} \eta_z + \alpha_{23} \zeta_z \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_3 = \mu J \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_{31} u_\xi + \varphi_{23} u_\eta + a_{31} \xi_x + a_{32} \eta_x + a_{33} \zeta_x \\ \varphi_{31} v_\xi + \varphi_{23} v_\eta + a_{31} \xi_y + a_{32} \eta_y + a_{33} \zeta_y \\ \varphi_{31} w_\xi + \varphi_{23} w_\eta + a_{31} \xi_z + a_{32} \eta_z + a_{33} \zeta_z \end{pmatrix}.$$

Система уравнений (1) записана через контрвариантные составляющие скорости:

$$U = u \xi_x + v \xi_y + w \xi_z; \quad V = u \eta_x + v \eta_y + w \eta_z;$$

$$W = u \zeta_x + v \zeta_y + w \zeta_z.$$

Якобиан преобразования координат в этом случае определяется из выражения

$$J = x_\xi (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi).$$

Система уравнений (1) содержит компоненты матриц вида

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 & \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z & \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z \\ \eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y + \eta_z \xi_z & \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 & \eta_x \zeta_x + \eta_y \zeta_y + \eta_z \zeta_z \\ \zeta_x \xi_x + \zeta_y \xi_y + \zeta_z \xi_z & \zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y + \zeta_z \eta_z & \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{21}, \quad \varphi_{13} = \varphi_{31}, \quad \varphi_{23} = \varphi_{32},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\xi \xi_x + v_\xi \xi_y + w_\xi \xi_z & u_\eta \xi_x + v_\eta \xi_y + w_\eta \xi_z & u_\zeta \xi_x + v_\zeta \xi_y + w_\zeta \xi_z \\ u_\xi \eta_x + v_\xi \eta_y + w_\xi \eta_z & u_\eta \eta_x + v_\eta \eta_y + w_\eta \eta_z & u_\zeta \eta_x + v_\zeta \eta_y + w_\zeta \eta_z \\ u_\xi \zeta_x + v_\xi \zeta_y + w_\xi \zeta_z & u_\eta \zeta_x + v_\eta \zeta_y + w_\eta \zeta_z & u_\zeta \zeta_x + v_\zeta \zeta_y + w_\zeta \zeta_z \end{pmatrix}.$$

Граничные условия (рис. 2) на твердой поверхности (FE):

$$u = k_s u_\infty \cos \alpha; \quad v = k_s u_\infty \cos \beta; \quad w = k_s u_\infty \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности; k_s – коэффициент вдува с поверхности (в статье $k_s = 0$).

Граничные условия на входной (AB) и верхних (BC, AD) границах:

$$u = u_\infty, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Граничные условия на выходной границе (CD):

$$p = p_\infty; \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0.$$

Моделирование турбулентных режимов течения проводилось на основании одно- и двухпараметриче-

ской модели турбулентности. Однопараметрическая модель [2] в системе координат (ξ, η, ζ) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial J \rho v_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \left(\rho U v_t - \rho (v_m + \chi v_t) \varphi_{11} \frac{\partial v_t}{\partial \xi} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \left(\rho V v_t - \rho (v_m + \chi v_t) \varphi_{22} \frac{\partial v_t}{\partial \eta} \right) \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(J \left(\rho W v_t - \rho (v_m + \chi v_t) \varphi_{33} \frac{\partial v_t}{\partial \zeta} \right) \right) = b_{v_t}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_{v_t} = & J \alpha \rho v_t S - J \frac{\gamma \rho v_t (\beta v_t - v_m)}{s^2} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \left(\frac{\partial v_t}{\partial \eta} \varphi_{12} + \frac{\partial v_t}{\partial \zeta} \varphi_{13} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \left(\frac{\partial v_t}{\partial \xi} \varphi_{12} + \frac{\partial v_t}{\partial \zeta} \varphi_{23} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \left(\frac{\partial v_t}{\partial \xi} \varphi_{13} + \frac{\partial v_t}{\partial \eta} \varphi_{23} \right) \right),$$

деформации S_{12}, S_{13}, S_{23} определяются из выражений:

$$S_{12} = \frac{1}{2} (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y + u_\zeta \zeta_y + v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x + v_\zeta \zeta_x);$$

$$S_{13} = \frac{1}{2} (u_\xi \xi_z + u_\eta \eta_z + u_\zeta \zeta_z + w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x + w_\zeta \zeta_x);$$

$$S_{23} = \frac{1}{2} (v_\xi \xi_z + v_\eta \eta_z + v_\zeta \zeta_z + w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y + w_\zeta \zeta_y).$$

Значения коэффициентов α, β, γ выбираются в соответствии с данными [2].

Граничные условия для v_t выставлялись следующим образом:

- на входной границе (AB) задается малое начальное значение турбулентной вязкости $v_t = 10^{-3} v_m$;

- на внешней границе (BC) и на оси симметрии (AD) – $\frac{\partial v_t}{\partial \eta} = 0$;

- на выходной (CD) границе – $\frac{\partial v_t}{\partial \xi} = 0$;

- на твердой поверхности (FE) значения v_t до точки отрыва пограничного слоя определялись на основании модели Ван Дрифта [3] ($s < 0,2\delta$, δ – толщина пограничного слоя)

$$v_t = (\chi s)^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{s}{A^+} \frac{\sqrt{\mu_m S}}{\mu_m} \right) \right]^2 S,$$

а за точкой отрыва пограничного слоя выставлялось граничное условие $\frac{\partial v_t}{\partial \eta} = 0$.

Двухпараметрическая модель [4] в системе координат (ξ, η, ζ) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \zeta} = \mathbf{b}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{u} = J(\rho k, \rho \varepsilon)^T;$$

$$\mathbf{e} = J(\rho U k - (\mu + \mu_t \sigma_k^{-1}) \varphi_{11} k_\xi, \rho U \varepsilon - (\mu + \mu_t \sigma_\varepsilon^{-1}) \varphi_{11} \varepsilon_\xi)^T;$$

$$\mathbf{f} = J(\rho V k - (\mu + \mu_t \sigma_k^{-1}) \varphi_{22} k_\eta, \rho V \varepsilon - (\mu + \mu_t \sigma_\varepsilon^{-1}) \varphi_{22} \varepsilon_\eta)^T;$$

$$\mathbf{g} = J(\rho W k - (\mu + \mu_t \sigma_k^{-1}) \varphi_{33} k_\zeta, \rho W \varepsilon - (\mu + \mu_t \sigma_\varepsilon^{-1}) \varphi_{33} \varepsilon_\zeta)^T;$$

$$\mathbf{b} = J(b_k, b_\varepsilon)^T;$$

$$b_k = J(\mu_t S^2 - \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \left(\frac{\partial k}{\partial \eta} \varphi_{12} + \frac{\partial k}{\partial \zeta} \varphi_{13} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} \varphi_{12} + \frac{\partial k}{\partial \zeta} \varphi_{23} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(J \left(\frac{\partial k}{\partial \xi} \varphi_{13} + \frac{\partial k}{\partial \eta} \varphi_{23} \right) \right);$$

$$b_\varepsilon = J \left(C_{1\varepsilon} \mu_t S^2 - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(J \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \varphi_{12} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \varphi_{13} \right) \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \varphi_{12} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} \varphi_{23} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(J \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \varphi_{13} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \varphi_{23} \right) \right).$$

Значения коэффициентов $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, \sigma_k, \sigma_\varepsilon$ выбираются в соответствии с данными [4].

Граничные условия для k и ε выставлялись в первом узле конечно-разностной сетки в направлении нормали к твердой поверхности (FE), находящейся вне вязкого подслоя, на основании зависимости

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}; \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\chi s_1}.$$

На входной границе (AB), внешних границах (BC, AD) и выходной (CD) границе –

$$v_t = 10^{-3} v_m; \quad \frac{\partial k}{\partial \eta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = 0.$$

Методом численного решения системы уравнений (1) является SIMPLE [5]. В основе метода лежит вывод конечно-разностных уравнений с помощью метода контрольного объема и их численная реализация на смещенной сетке. Особенностью такой сетки является вычисление значений давления и компонент скорости в различных узлах.

После интегрирования уравнений количества движения системы (1) по контрольному объему (рис. 4) было получено:

$$a_{i,j,k}^n V_{i,j,k}^{n+1/2} = \sum_l a_l^n V_l^{n+1/2} + p_{i,j,k}^n + b_{i,j,k}^n, \quad (4)$$

где $l = \{i \pm 1, j, k; i, j \pm 1, k; i, j, k \pm 1\}$. Коэффициенты a_l определяются из выражения

$$a_l = d_m \left[0; (1 - 0,1 Pe_m)^5 \right] + [0; \pm f_m], \quad Pe_m = \frac{f_m}{d_m},$$

$$m = \{i \pm 1, j \pm 1, k; i \pm 1, j, k \pm 1; i, j \pm 1, k \pm 1\}. \quad (5)$$

Оператор $[A; B]$ определяет наибольшую из величин A и B . Центральный коэффициент $a_{i,j,k}$ и источникный член $b_{i,j,k}$ имеют вид

$$b_p = \sum_k a_k \left[N_k^* \left(\frac{y_p D_p}{y_k D_k} - 1 \right) + \frac{y_p D_p}{y_k D_k} (N_k^* \varphi_k - M_k^* \psi_k) \right] -$$

$$- \left(\frac{\mu D^2 \xi_x \xi_y \Delta \xi \Delta \eta M^*}{y} \right)_p. \quad (6)$$

Конвективные и диффузионные составляющие определяются как

$$f_{i\pm 1/2,j,k} = (J\rho U \Delta\eta \Delta\zeta)_{i\pm 1/2,j,k};$$

$$f_{i,j\pm 1/2,k} = (J\rho V \Delta\eta \Delta\zeta)_{i,j\pm 1/2,k};$$

$$f_{i,j,k\pm 1/2} = (J\rho W \Delta\xi \Delta\eta)_{i,j\pm 1/2,k};$$

$$d_{i\pm 1/2,j,k} = (\phi_{11}\mu)_{i\pm 1/2,j,k} \frac{(\Delta\eta \Delta\zeta)_{i,j,k}}{\Delta\xi_{i\pm 1/2,j,k}};$$

$$d_{i,j\pm 1/2,k} = (\phi_{22}\mu)_{i,j\pm 1/2,k} \frac{(\Delta\xi \Delta\zeta)_{i,j,k}}{\Delta\eta_{i,j\pm 1/2,k}};$$

$$d_{i,j,k\pm 1/2} = (\phi_{33}\mu)_{i,j,k\pm 1/2} \frac{(\Delta\xi \Delta\eta)_{i,j,k}}{\Delta\zeta_{i,j,k\pm 1/2}};$$

где $\Delta\xi, \Delta\eta, \Delta\zeta$ – размеры контрольного объема в направлениях ξ, η, ζ .

После записи уравнений в соответствующих контрольных объемах, смещенных относительно контрольного объема с индексом i, j, k , предназначенного для определения давления p (рис. 5), коэффициенты примут вид

$$a_{\tilde{i},j,k}^n u_{i,j,k}^{n+1/2} = \sum_{l_1} a_{l_1}^n u_{l_1}^{n+1/2} + b_{\tilde{i},j,k}^n - \left[J(p_\xi \xi_x + p_\eta \eta_x + p_\zeta \zeta_x) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta \right]_{\tilde{i},j,k}^n; \quad (7)$$

$$a_{i,\tilde{j},k}^n v_{i,\tilde{j},k}^{n+1/2} = \sum_{l_2} a_{l_2}^n v_{l_2}^{n+1/2} + b_{i,\tilde{j},k}^n - \left[J(p_\xi \xi_y + p_\eta \eta_y + p_\zeta \zeta_y) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta \right]_{i,\tilde{j},k}^n; \quad (8)$$

$$a_{i,j,\tilde{k}}^n w_{i,j,\tilde{k}}^{n+1/2} = \sum_{l_3} a_{l_3}^n w_{l_3}^{n+1/2} + b_{i,j,\tilde{k}}^n - \left[J(p_\xi \xi_z + p_\eta \eta_z + p_\zeta \zeta_z) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta \right]_{i,j,\tilde{k}}^n. \quad (9)$$

Здесь n – индекс временного слоя, а индексы $\tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}, l_1, l_2, l_3$ имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{i} &= i + 1/2, \quad l_1 = \{ \tilde{i} \pm 1, j, k; \tilde{i}, j \pm 1, k; \tilde{i}, j, k \pm 1 \}, \\ \tilde{j} &= j + 1/2, \quad l_2 = \{ i \pm 1, \tilde{j}, k; i, \tilde{j} \pm 1, k; i, \tilde{j}, k \pm 1 \}, \\ \tilde{k} &= k + 1/2, \quad l_3 = \{ i \pm 1, j, \tilde{k}; i, j \pm 1, \tilde{k}; i, j, \tilde{k} \pm 1 \}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

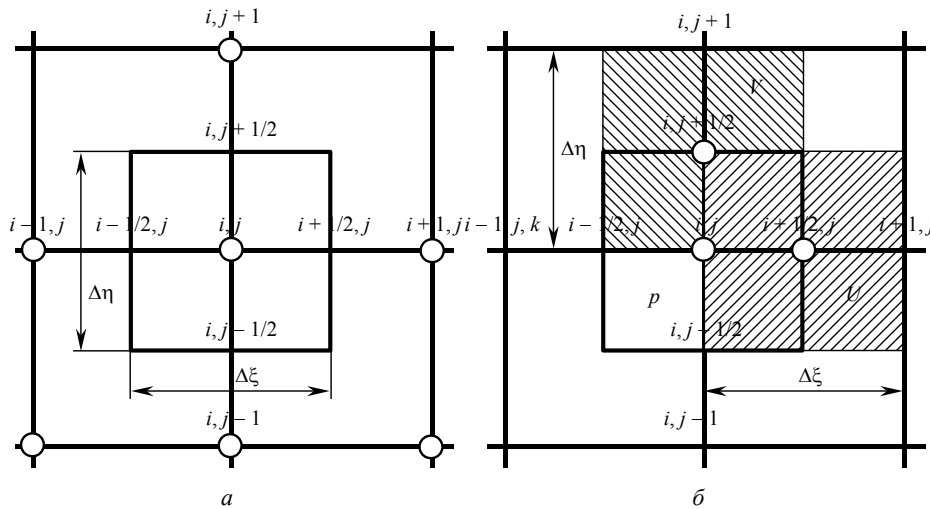


Рис. 4. Контрольный объем для проведения вычислений: *a* – контрольный объем для численного интегрирования уравнений; *b* – размещение контрольных объемов для определения компонент скорости U, V относительно контрольного объема для определения давления p

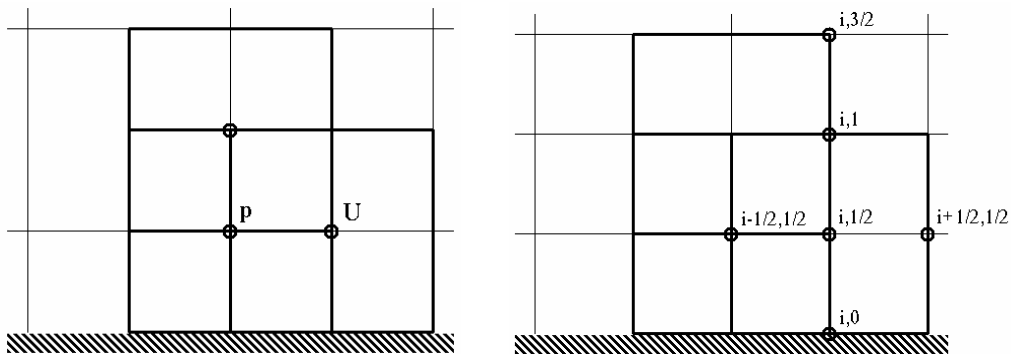


Рис. 5. Расположение расчетных ячеек в пристеночной области

Уравнение для поправок к давлению $(\rho \cdot M)_\xi + (\rho \cdot N)_\eta = 0$ выводится подстановкой в уравнение неразрывности

$$\left[(J\rho^n)_i + (J\rho^n U^{n+1})_\xi + (J\rho^n V^{n+1})_\eta + (J\rho^n W^{n+1})_\zeta \right]_{i,j,k} = 0$$

значений переменных $U_{i,j,k}^{n+1}$, $V_{i,j,k}^{n+1}$, $W_{i,j,k}^{n+1}$, определяемых на гранях контрольного объема, используемого для расчета давления. Для этого первоначально определим взаимосвязь между ковариантными компонентами вектора скорости и поправками к давлению:

$$u_{\tilde{i},j,k}^{n+1} = u_{\tilde{i},j,k}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \xi_x + \delta p_\eta \eta_x + \delta p_\zeta \zeta_x)^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{\tilde{i},j,k}; \quad (11)$$

$$v_{i,\tilde{j},k}^{n+1} = v_{i,\tilde{j},k}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \xi_z + \delta p_\eta \eta_z + \delta p_\zeta \zeta_z)^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{i,\tilde{j},k}; \quad (12)$$

$$w_{i,j,\tilde{k}}^{n+1} = w_{i,j,\tilde{k}}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \xi_z + \delta p_\eta \eta_z + \delta p_\zeta \zeta_z)^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{i,j,\tilde{k}}. \quad (13)$$

Для перехода к контравариантной составляющей вектора скорости $U_{i,j,k}^{n+1/2}$, $U_{i,j,k}^{n+1}$ уравнения (11)–(13) записываем относительно узла \tilde{i}, j, k , умножив уравнение (11) на ξ_x , уравнение (12) – на ξ_y , а уравнение (13) – на ξ_z . После суммирования получится разностное уравнение для определения контравариантной составляющей скорости $U_{i,j,k}^{n+1}$:

$$U_{i,j,k}^{n+1} = U_{i,j,k}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \varphi_{11} + \delta p_\eta \varphi_{12} + \delta p_\zeta \varphi_{13})^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{i,j,k}. \quad (14)$$

Для перехода к контравариантной составляющей скорости $V_{i,j,k}^{n+1/2}$, $V_{i,j,k}^{n+1}$ уравнения (11)–(13) записываем относительно узла i, \tilde{j}, k , умножив уравнение (1) на η_x , уравнение (12) – на η_y , а уравнение (13) – на η_z . После суммирования получается разностное уравнение для определения контравариантной составляющей скорости $V_{i,j,k}^{n+1}$:

$$V_{i,\tilde{j},k}^{n+1} = V_{i,\tilde{j},k}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \varphi_{12} + \delta p_\eta \varphi_{22} + \delta p_\zeta \varphi_{23})^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{i,\tilde{j},k}. \quad (15)$$

Для перехода к контравариантной составляющей скорости $W_{i,j,\tilde{k}}^{n+1/2}$, $W_{i,j,\tilde{k}}^{n+1}$ уравнения (11)–(13) записываем относительно узла i, j, \tilde{k} , умножив уравнение (11)

на ζ_x , уравнение (12) – на ζ_y , а уравнение (13) – на ζ_z . После суммирования получается разностное уравнение для определения контравариантной составляющей скорости $W_{i,j,\tilde{k}}^{n+1}$:

$$W_{i,j,\tilde{k}}^{n+1} = W_{i,j,\tilde{k}}^{n+1/2} - \left[\frac{J}{a^n} (\delta p_\xi \varphi_{13} + \delta p_\eta \varphi_{23} + \delta p_\zeta \varphi_{33})^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{i,j,\tilde{k}}. \quad (16)$$

После подстановки соотношений (14)–(16) в уравнение неразрывности получается соотношение

$$\begin{aligned} & \left[(\vartheta_{11} \delta p_\xi^{n+1})_\xi + (\vartheta_{12} \delta p_\eta^{n+1})_\xi + (\vartheta_{13} \delta p_\zeta^{n+1})_\xi + \right. \\ & \left. + (\vartheta_{12} \delta p_\xi^{n+1})_\eta + (\vartheta_{22} \delta p_\eta^{n+1})_\eta + (\vartheta_{23} \delta p_\zeta^{n+1})_\eta + \right. \\ & \left. + (\vartheta_{13} \delta p_\xi^{n+1})_\zeta + (\vartheta_{23} \delta p_\eta^{n+1})_\zeta + (\vartheta_{33} \delta p_\zeta^{n+1})_\zeta \right]_{ijk} = \\ & = \left[(\rho^n U^{n+1/2})_\xi + (\rho^n V^{n+1/2})_\eta + (\rho^n W^{n+1/2})_\zeta \right]_{ijk}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $\Omega = \Phi \frac{\rho J^2}{a^n} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta$.

Таким образом,

$$a_{i,j,k}^n \delta p_{i,j,k}^{n+1} = \sum_l a_l^n \delta p_l^{n+1} - \sum_m a_m^n \delta p_m^{n+1} + b_{i,j,k}^{n+1/2}, \quad (18)$$

где $m = \{i \pm 1, j \pm 1, k; i \pm 1, j, k \pm 1; i, j \pm 1, k \pm 1\}$.

Источниковый член и коэффициенты уравнения (18):

$$\begin{aligned} b_{i,j,k}^{n+1/2} &= \left[\left(J(\rho^n - \rho^{n-1}) / \Delta t + (J\rho^n U^{n+1/2})_\xi + (J\rho^n V^{n+1/2})_\eta \right. \right. \\ & \left. \left. + (J\rho^n W^{n+1/2})_\zeta \right) \Delta \xi \Delta \eta \Delta \zeta \right]_{ijk}; \\ a_{i\pm 1,j,k}^n &= \left(\frac{\vartheta_{11}}{\Delta \xi} \right)_{i\pm 1/2,j,k} (\Delta \eta \Delta \zeta)_{i,j,k} + ([0; \vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2,j\pm 1/2,k} - \\ & - ([0; -\vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2,j\mp 1/2,k} + \\ & + ([0; \vartheta_{13}] \Delta \eta)_{i\pm 1/2,j,k\pm 1/2} - ([0; -\vartheta_{13}] \Delta \eta)_{i\pm 1/2,j,k\mp 1/2}; \\ a_{i,j,\pm 1,k}^n &= \left(\frac{\vartheta_{22}}{\Delta \eta} \right)_{i,j,\pm 1/2,k} (\Delta \xi \Delta \zeta)_{i,j,k} + ([0; \vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2,j\pm 1/2,k} - \\ & - ([0; -\vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2,j\mp 1/2,k} + \\ & + ([0; \vartheta_{23}] \Delta \xi)_{i,j\pm 1/2,k\pm 1/2} - ([0; -\vartheta_{13}] \Delta \xi)_{i,j\pm 1/2,k\mp 1/2}; \\ a_{i,j,k\pm 1}^n &= \left(\frac{\vartheta_{33}}{\Delta \zeta} \right)_{i,j,k\pm 1/2} (\Delta \xi \Delta \eta)_{i,j,k} + ([0; \vartheta_{13}] \Delta \eta)_{i\pm 1/2,j,k\pm 1/2} - \\ & - ([0; -\vartheta_{13}] \Delta \eta)_{i\pm 1/2,j,k\mp 1/2} + \\ & + ([0; \vartheta_{23}] \Delta \xi)_{i,j\pm 1/2,k\pm 1/2} - ([0; -\vartheta_{23}] \Delta \xi)_{i,j\pm 1/2,k\mp 1/2}; \\ a_{i\pm 1,j\pm 1,k}^n &= \frac{1}{2} ([0; \vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2,j\pm 1/2,k}; \end{aligned}$$

$$a_{i\pm 1, j\pm 1, k}^n = -\frac{1}{2}([0; -\vartheta_{12}] \Delta \zeta)_{i\pm 1/2, j\pm 1/2, k};$$

$$a_{i\pm 1, j, k\pm 1}^n = \frac{1}{2}([0; \vartheta_{13}] \Delta \eta)_{i\pm 1/2, j, k\pm 1/2};$$

$$a_{i, j\pm 1, k\pm 1}^n = \frac{1}{2}([0; \vartheta_{23}] \Delta \xi)_{i, j\pm 1/2, k\pm 1/2};$$

$$a_{i, j\pm 1, k}^n = -\frac{1}{2}([0; -\vartheta_{23}] \Delta \xi)_{i, j\pm 1/2, k};$$

$$a_{i, j, k} = \sum_l a_l.$$

Дискретный аналог уравнений (2), (3)

$$(a \mathbf{v})_{i, j, k}^{n+1} = \sum_l (a \mathbf{v})_{i, j, k}^{n+1} + \mathbf{b}_{i, j, k}^n, \quad (19)$$

где \mathbf{v} представляет собой вектор со следующими компонентами: $\mathbf{v} = (v_i, E, \varepsilon)^T$. Коэффициенты $a_{i, j}, b_{i, j}, c_{i, j}, d_{i, j}, e_{i, j}$ уравнений (19) определялись согласно зависимостям (5) и (6); $\mathbf{b} = (b_v, b_k, b_\varepsilon)$ содержит центрально-разностную аппроксимацию источниковых членов уравнений (2), (3).

Сходимость метода численного решения была установлена путем измельчения разностной сетки и варьирования размерами области численного интегрирования [6]. В качестве тестовой рассматривалась задача обтекания сферы. Установление численного решения контролировалось на основании вычисления значения коэффициента полного сопротивления и сравнения полученного результата с известными экспериментальными данными для сферы [7]. Рассчитанные значения коэффициента полного сопротивления удовлетворительно согласуются с данными эксперимента [7].

Расчеты поверхностей с неравномерной геометрией показали, что в этом случае отсутствует осевая симметрия следа (рис. 6) и отрывной зоны (рис. 7). Неравномерность геометрии поверхности приводит к неравномерному распределению давления вдоль радиальной координаты ζ . Вследствие этого различно и положение точки отрыва пограничного слоя. Особенно это заметно при отрыве пограничного слоя с поверхности «арахиса» (рис. 6). Теперь потеря устойчивости циркуляционной зоны происходит при

различных углах θ на каждой из плоскостей σ , что приводит к деформации вихревой зоны за телом и отсутствию осевой симметрии следа. Внутри циркуляционной зоны жидкость движется по спирали. Также наблюдаются осцилляции положения отрыва пограничного слоя, что выражается в изменении значения сопротивления с течением времени.

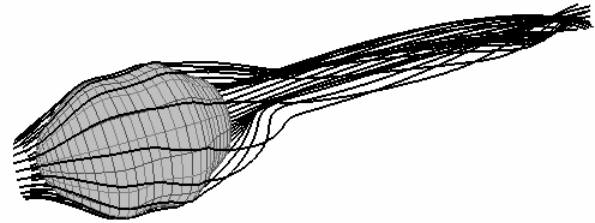


Рис. 6. Структура течения около «арахиса» при $Re = 4 \cdot 10^4$

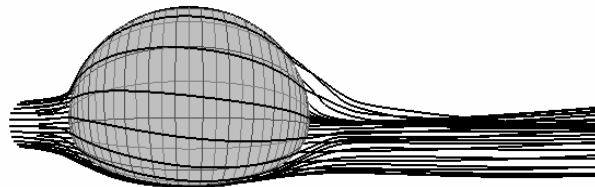


Рис. 7. Структура течения около неравномерно деформированного «овала» при $Re = 4 \cdot 10^4$

Библиографические ссылки

1. Горохов М. М. Математическое моделирование обтекания и горения гранул твердого топлива в турбулентных потоках : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2005. – 258 с.
2. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений // Механика жидкости и газа. – 1971. – № 5. – С. 114–127.
3. Прандтль Л. Гидромеханика. – М. : ИЛ, 1951. – 346 с.
4. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulence flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol. 3. – P. 269–289.
5. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М. : Энергоиздат, 1984. – 136 с.
6. Корепанов А. В. Численное моделирование горения твердого гранулированного топлива в турбулентном потоке : дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2004. – 106 с.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1987. – 840 с.

M. M. Gorokhov, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
 A. V. Korepanov, PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University
 V. A. Tenenev, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Modeling of Three-Dimensional Turbulent Flows Near Surfaces of Complex Geometry

The paper presents the technique of numerical calculation of turbulent flow parameters around arbitrary geometry surfaces and the testing method for solving the problem of flow past of a sphere at Reynolds numbers $Re = 1 \div 10^6$.

Key words: turbulence, numerical simulation.