УДК 531.37

И. Н. Ефимов, доктор технических наук, профессор, Чайковский технологический институт (филиал) Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова
Е. А. Морозов, доктор технических наук, профессор, Чайковский технологический институт (филиал) Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова
С. А. Жукова, кандидат технических наук, доцент, Чайковский технологический институт (филиал) Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова
В. В. Магафуров, аспирант, Чайковский технологический институт (филиал) Ижевского государственного технического университета имени М. Т. Калашникова

УСТОЙЧИВЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ОСНОВЕ ЭКВИАФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Определены бесконечно малые однопараметрические преобразования пространства угловых скоростей свободного вращения твердого тела. На основе полученных преобразований предлагаются устойчивые к накоплению погрешности алгоритмы численного интегрирования уравнений движения. В качестве примера эффективного применения предлагаемого подхода рассмотрена задача о свободном вращении твердого тела.

Ключевые слова: случай Эйлера, эквиаффинные преобразования, численные алгоритмы, сходимость.

В методе интегрирования динамических уравнений Гамильтона [1] используются алгоритмы, которые представляют собой бесконечно малые по параметру шага канонические преобразования фазового пространства. В этом случае следствием сохранения элемента объема является устойчивость алгоритмов к накоплению погрешности счета, а сам процесс интегрирования воспроизводит движение исходной системы в условиях малого консервативного возмущения. Выполнение условий теоремы Лиувилля [2] в классических задачах динамики твердого тела дает основание предполагать наличие аналогичных преобразований для соответствующих пространств угловых скоростей. Возникает задача нахождения алгоритмов численного интегрирования уравнений движения в форме бесконечно малых по параметру шага интегрирования преобразований, сохраняющих элементы площадей или объемов в пространствах угловых скоростей и координат для случая свободного вращения твердого тела.

Возьмем некоторую произвольную точку плоскости с координатами x_0, y_0 и рассмотрим преобразование

$$x_1 = x_0 + a \cdot y_0,\; y_1 = y_0 + b \cdot x_1, \tag{1}$$

где $a, b \in R$ – действительные числа. Подчеркнем, что во второе уравнение подставляется значение x, уже вычисленное в первом уравнении, иными словами, речь идет о преобразовании

$$x_1 = x_0 + a \cdot y_0,\; y_1 = b \cdot x_0 + \left(1 + a \cdot b\right) y_0,$$

определитель матрицы которого равен единице:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 1+ab \end{vmatrix} = 1 + ab - ab = 1. \tag{2}$$

Преобразования, обладающие таким свойством, в аналитической геометрии принято называть эквиаффинными [3], а в теории групп – унимодулярными. Эквиаффинные преобразования имеют определенный геометрический смысл, их действие на координатной плоскости сохраняет площадь преобразуемой геометрической фигуры. В частности,

$$\left(x_1 - x_0\right)\left(y_1 - y_0\right) = \left(x_i - x_{i-1}\right)\left(y_i - y_{i-1}\right),\; i = 2, 3... \tag{3}$$

площадь прямоугольника, образованного приращениями координат в преобразовании (1), не будет изменяться при его последовательном применении.

Рассмотрим задачу о свободном вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в отсутствии действия моментов внешних сил, или случай Эйлера [2, 4]. Закон изменения угловой скорости в системе координат, центр которой совмещен с центром масс твердого тела, а оси координат жестко связаны с его главными осями инерции, выражается динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_1}{dt} &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}\Omega_2\Omega_3; \\ \frac{d\Omega_2}{dt} &= \frac{I_3 - I_1}{I_2}\Omega_3\Omega_1; \\ \frac{d\Omega_3}{dt} &= \frac{I_1 - I_2}{I_3}\Omega_1\Omega_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ – проекции угловой скорости на оси координат, а величины I_1, I_2, I_3 – соответствующие им главные моменты инерции. Кроме того, действуют законы сохранения кинетической энергии E_0 и момента импульса L_0 :

$$I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2 = 2E_0; \quad I_1^2\Omega_1^2 + I_2^2\Omega_2^2 + I_3^2\Omega_3^2 = L_0^2. \tag{5}$$

Получено 13.06.13

Для симметрического волчка $I_1 = I_2 \neq I_3$ правая часть третьего уравнения системы (4) обращается в ноль, что дает $\Omega_3 = \text{const}$. Введем постоянную величину

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1}$$

и запишем динамические уравнения Эйлера в виде

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\omega \cdot \Omega_2; \quad \frac{d\Omega_2}{dt} = \omega \cdot \Omega_1; \quad \Omega_3 = \Omega_3^{(0)}. \qquad (6)$$

Первые два дифференциальные уравнения определяют тригонометрические функции синуса и косинуса, поэтому их аналитическое решение будет

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_1^{(0)} \cos \omega t - \Omega_2^{(0)} \sin \omega t; \\ \Omega_2 &= \Omega_1^{(0)} \sin \omega t + \Omega_2^{(0)} \cos \omega t, \end{aligned} \qquad (7)$$

где $\Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)}$ – значения угловых скоростей при $t = 0$.

Фиксируя в (7) $t = \tau$, получим преобразование

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(i+1)} &= \Omega_1^{(i)} \cos \omega t - \Omega_2^{(2)} \sin \omega t; \\ \Omega_2^{(i+1)} &= \Omega_1^{(i)} \sin \omega t + \Omega_2^{(i)} \cos \omega t, \end{aligned} \qquad (8)$$

последовательное применение которого будет дискретно воспроизводить непрерывное решение. Как и в случае (1), преобразование (8) является эквиаффинным, поскольку определитель матрицы преобразования равен единице:

$$\begin{vmatrix} \cos \omega\tau & -\sin \omega\tau \\ \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{vmatrix} = \cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau = 1.$$

Алгоритм численного интегрирования уравнения (6) при использовании метода Эйлера [5] запишется в форме

$$\begin{aligned} &\Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i)} \tau; \ \Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i)} \tau; \\ &\Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \quad i = 0, 1, 2 \ldots, \end{aligned} \qquad (9)$$

где параметр τ является шагом интегрирования. Определитель матрицы преобразования (9) не равен единице:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\omega\tau \\ \omega\tau & 1 \end{vmatrix} = 1 + \omega^2 \tau^2 > 1.$$

Следовательно, преобразование (9) не эквиаффинное, а площадь прямоугольника, образованного приращениями координат, в отличие от преобразования (1) будет возрастать на каждом шаге интегрирования на величину $\omega^2 \tau^2$. В этом состоит геометрическая интерпретация быстрого накопления погрешности счета для метода Эйлера.

Вычисление $\Omega_1^{(i)}$ во втором уравнении (9) требует введения дополнительного оператора, фиксирующего $\Omega_1^{(i)}$. Чтобы избежать этого, перепишем (9) в виде

$$\begin{aligned} &\Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i)} \tau; \ \Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i+1)} \tau; \\ &\Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \ i = 0, 1, 2 \ldots, \end{aligned} \qquad (10)$$

или в виде

$$\begin{aligned} &\Omega_2^{(i+1)} = \Omega_2^{(i)} + \omega \cdot \Omega_1^{(i)} \tau; \ \Omega_1^{(i+1)} = \Omega_1^{(i)} - \omega \cdot \Omega_2^{(i+1)} \tau; \\ &\Omega_3^{(i+1)} = \Omega_3^{(i)}; \ i = 0, 1, 2 \ldots \end{aligned} \qquad (11)$$

Полученные алгоритмы (10) и (11) осуществляют эквиаффинные преобразования в пространстве и содержат минимально возможное количество арифметических операций, достаточных для осуществления численного интегрирования, а выполнение условия (2) делает процесс численного интегрирования устойчивым к накоплению погрешности счета.

Приведены результаты численного интегрирования динамических уравнений симметрического волчка (6) по эквиаффинному алгоритму (10) и алгоритму Эйлера (9) при значениях моментов инерции $I_1 = I_2 = 1$, угловых скоростей $\Omega_1^{(0)} = 1, \Omega_2^{(0)} = 0$, $\Omega_3^{(0)} = 2$, в начальный момент времени $t = 0$ и шаге интегрирования $\tau = 0{,}05$.

В качестве меры погрешности счета использовалось относительное отклонение величины энергии E, определяемое интегралом движения (5) на каждом шаге интегрирования, от значения в начальный момент времени E_0:

$$DE = \left(E^{(i+1)} - E_0 \right) / E_0. \qquad (12)$$

Здесь E_0 определяет кинетическую энергию системы в начальный момент времени, и из выражения (5) получим:

$$E_0 = \frac{1}{2} \mathrm{I}_1 \left(\Omega_1^{(0)} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_2 \left(\Omega_2^{(0)} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_3 \left(\Omega_3^{(0)} \right)^2.$$

Отклонение величины энергии $E^{(i+1)}$ на каждом шаге интегрирования определяется выражением

$$E^{(i+1)} = \frac{1}{2} \mathrm{I}_1 \left(\Omega_1^{(i+1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_2 \left(\Omega_2^{(i+1)} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathrm{I}_3 \left(\Omega_3^{(i+1)} \right)^2.$$

В ходе реализации счета по эквиаффинному алгоритму и по методу Эйлера были получены следующие графики, отображающие зависимость проекций угловых скоростей и погрешностей счета (рис. 1, 2).

Как видно из сравнения графиков, в случае использования эквиаффинного алгоритма величина погрешности осциллирует с постоянной амплитудой (рис. 1), в то время как использование алгоритма Эйлера (рис. 2) приводит к быстрому росту погрешности.

Численное интегрирование уравнений движения твердого тела в случае Эйлера может быть эффективно выполнено на основе использования эквиаффинных преобразований пространства. Алгоритмы интегрирования, построенные на основе указанных преобразований, устойчивы к накоплению погрешности счета, содержат минимально возможное количество арифметических операций, структурно просты, единообразны и включают только операции умножения и сложения.

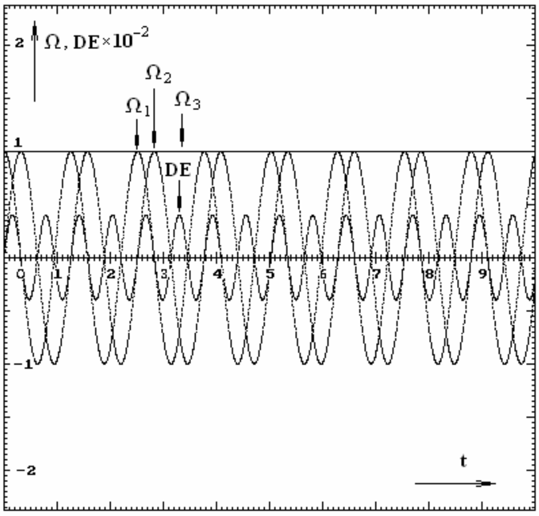

Рис. 1. Зависимость проекций угловых скоростей и погрешности счета по эквиаффинному алгоритму

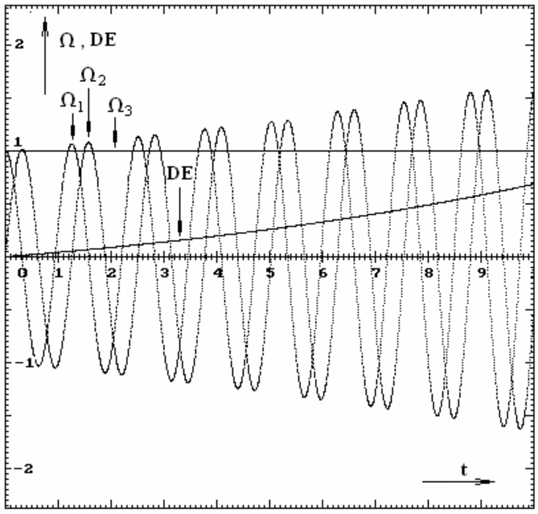

Рис. 2. Зависимость проекций угловых скоростей и погрешности счета по методу Эйлера

Библиографические ссылки

1. *Ефимов И. Н.*, *Морозов Е. А.* Каноническое интегрирование динамических систем. – Екатеринбург ; Ижевск : Изд-во Ин-та экономики УрО РАН, 2006 – 198 с.

2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М., 1974. – 432 с.

3. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия. – М., 1973. – 752 с.

4. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Механика. – М., 1965. – 204 с.

5. *Демидович Б. П.*, *Марон И. А.*, *Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. – М., 1963. – 400 с.

I. N. Efimov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technology Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University
E. A. Morozov, DSc in Engineering, Professor, Tchaikovsky Technology Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University
S. A. Zhukova, PhD in Engineering, Associate Professor, Tchaikovsky Technology Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University
V. V. Magafurov, Post-graduate, Tchaikovsky Technology Institute (branch) of Kalashnikov Izhevsk State Technical University

Stable Algorithms Based on Equiaffine Transformations

Infinitesimal one-parameter transformations of the angular velocity space of the rigid object free rotation are determined. According to obtained transformations algorithms for numerical integration of motion equation are proposed that are resistant to error accumulation. The task of free rotation of a solid is considered as the example of the effective application of the proposed method.

Key words: case of Euler, equiaffine transformations, numerical algorithms, convergence.