МАТЕМАТИКА

УДК 519.71

Чан Тхань Туан, аспирант, Воронежский государственный университет

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается задача управления линейной стационарной неоднородной динамической системой при наличии контрольных точек и условий на управление. Строятся быстро убывающие при $t \to \infty$ функции состояния и управления.

Ключевые слова: система управления, образ, ядро, коядро, полуобратная матрица.

Рассматривается полностью управляемая динамическая система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ – состояние системы; $u(t) \in R^s$ – управление или управляющее воздействие; A и B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $t \in [0, +\infty)$; $f(t)$ – достаточно гладкая на $[0, +\infty)$ вектор-функция, принадлежащая R^n.

Пусть для состояния $x(t)$ и управления $u(t)$ заданы условия:

$$x(t_k) = a_k^{00}, \;\; k = \overline{0, m+1}, \;\; m \in N, \;\; t_0 = 0, \;\; t_{m+1} = T, \qquad (2)$$

$$D_j u \,|_{t=t_k} = \alpha_k^j, \;\; j = \overline{0, r_k}, \;\; k = \overline{0, m+1} \qquad (3)$$

(в случае отсутствия условий (3) можно считать $r_k = -1$; D_j – производная по *t* порядка *j*).

Интерес к этой задаче связан с тем, что она возникает во многих приложениях, например при нахождении гладкого управления динамической системой с условием прохождения «траектории» $x(t)$ через контрольные точки (t_k, a_k^{00}) при контроле за управлением в моменты t_k.

В работе [1] для системы (1) с $f(t) \equiv 0$ и условиями (2), (3) построены функции состояния $x(t)$ и управления $u(t)$ в виде многочленов по степеням *t* с векторными коэффициентами. Однако полиномиальное состояние $x(t)$ имеет «дефектное» свойство [2]: если в конечной точке не осуществилось переключение режимов, то полиномиальная функция стремится к бесконечности при $t \to +\infty$.

В работе [3] доказано, что если часть $Qf(t)$ (Q – проектор на $\mathrm{Coker}B$) вектор-функции $f(t)$ является многочленом по степеням e^{-t} порядка *h*, то существует управление $u(t)$ системы (1), удовлетворяющее условиям (3), при применении которого состояние $x(t)$ удовлетворяет условиям (2) и является быстро убывающей при $t \to +\infty$ функцией вида $x(t) = \sum_{\xi=1}^{h} \gamma_\xi e^{-\xi t}$.

В настоящей работе приводится другой способ построения управления $u(t)$ системы (1), удовлетворяющего условиям (3), под воздействием которого состояние $x(t)$ удовлетворяет условиям (2) и также стремится к нулю при $t \to +\infty$ со скоростью убывания экспоненциальной функции, т. е. $\| x(t) \| \le ce^{-t}$, $t \in [t_0, +\infty)$, c – некоторая постоянная.

Для этого применяется метод каскадной декомпозиции исходной системы, разработанной в работе [4].

Построение функций $x(t)$ и $u(t)$

Условия (3) с помощью (2) и (1) переводятся на условия для $x(t)$ в точках t_k:

$$D_j x \,|_{t_k} = x_k^{0j}, \;\; j = \overline{1, r_k + 1}, \;\; k = \overline{0, m+1}. \qquad (4)$$

Вводятся обозначения: $A_0 = A$, $B_0 = B$, $Q_0 = Q$, $P_0 = P$, $x^0(t) = x(t)$, $f_0(t) = f(t)$, $A_i = Q_{i-1} A_{i-1} Q_{i-1}$, $B_i = Q_{i-1} A_{i-1} (I - Q_{i-1})$, $x^i(t) = Q_{i-1} x^{i-1}(t)$, $y^i(t) = (I - Q_{i-1}) x^{i-1}(t)$, $f_i(t) = Q_{i-1} f_{i-1}(t)$; B_i^- – полуобратная матрица к матрице B_i; P_i, Q_i – проекторы на $\mathrm{Ker}B_i$ и $\mathrm{Coker}B_i$ соответственно, отвечающие разложениям в прямые суммы:

$$\mathrm{Im}\, B_{i-1} = \mathrm{Coim}B_i \dotplus \mathrm{Ker}B_i,$$

$$\mathrm{Coker}B_{i-1} = \mathrm{Im}\, B_i \dotplus \mathrm{Coker}B_i,$$

$i = 1, 2, \ldots$ (верхний символ *i* в $x^i(t)$ и $y^i(t)$ означает номер (не показатель степени)); I – здесь и далее единичный оператор в соответствующем подпространстве. Отображения и соответствующие им матрицы будем обозначать одинаково.

Имеют место следующие утверждения.

Получено 11.01.11

Лемма 1 (см. [1], [3]). *Полностью управляемая система (1) с условиями (2), (3) эквивалентна системе*

$$\begin{cases} u(t) = B^{-}\dot{x}(t) - B^{-}Ax(t) - B^{-}f(t) + Pu(t), \\ x(t) = x^{1}(t) + y^{1}(t), \\ y^{i}(t) = B_i^{-}\dot{x}^{i}(t) - B_i^{-}A_i x^{i}(t) - B_i^{-}f_i(t) + P_i y^{i}(t), \\ x^{i-1}(t) = x^{i}(t) + y^{i}(t), \\ \dot{x}^{p} = A_p x^{p}(t) + B_p y^{p}(t) + f_p(t),\ i = \overline{1,p} \end{cases} \quad (5)$$

с условиями

$$D_j x^{i}|_{t_k} = a_k^{ij},\ \ k = \overline{0,m+1},\ \ j = \overline{0, r_k + i + 1}, \quad (6)$$

где $P_i y^{i}(t)$ *– произвольные вектор-функции из* $\mathrm{Ker}B_i$, *удовлетворяющие условиям*

$$D_j P_i y^{i}|_{t_k} = P_i(I - Q_{i-1})a_k^{i-1j},\ \ k = \overline{0,m+1},\ \ j = \overline{0, r_k + i}, \quad (7)$$

$$a_k^{ij} = Q_{i-1}a_k^{i-1j},\ \ j = \overline{0, r_k + i},$$

$$a_k^{ir_k+i+1} = A_i a_k^{ir_k+i} + B_i(I - Q_{i-1})a_k^{i-1r_k+i} + D_{r_k+i}f_i|_{t_k},$$

$k = \overline{0,m+1}$, $p = \min q$, а q *таково, что* $\mathrm{rank}(B\ AB\ A^2B\ \dots\ A^qB) = n.$

Лемма 2. *В пространстве* R^l *существует вектор-функция*

$$F(t) = \sum_{\xi=0}^{\tau} \frac{b_\xi}{(t+\Delta)^{\beta+\xi}} e^{-\omega t},\ \ \tau = m + 1 + \sum_{k=0}^{m+1}\tau_k,\ \ b_\xi \in R^l, \quad (8)$$

удовлетворяющая условиям

$$D_j F|_{t_k} = c_k^{j},\ \ k = \overline{0,m+1},\ \ j = \overline{0,\tau_k}$$

для любых c_k^j *из* R^l, *где* $\Delta > 0$, $\beta \in Z$, $\beta > 0$, $\omega > 0$ *– некоторые постоянные.*

Для построения $x(t)$ в виде быстро убывающей при $t \to +\infty$ функции достаточно, чтобы каждая часть $f_i(t)$, $i = \overline{1,p}$ вектор-функции $f(t)$ и ее производные до $(i-1)$-го порядка были быстро убывающими. Предполагаем, что

$$D_j f_i(t) = O(e^{-\omega t}),\ \ j = \overline{0, i-1},\ \ i = \overline{1,p}. \quad (9)$$

Далее следует построить $x^p(t)$ в виде вектор-функции (8), удовлетворяющей условиям (6) при $i = p.$ Она существует в силу леммы 2. Затем построить функцию $P_i y^i(t)$, удовлетворяющую условиям (7) при $i = p.$ Из третьего соотношения системы (5) при $i = p$ находится функция $y^p(t)$ и из четвертого соотношения этой системы при $i = p$ определяется $x^{p-1}(t).$

Эта процедура повторяется с $i = p-1, p-2, \dots$ Наконец, из второго соотношения системы (5) находится $x(t)$, и из первого соотношения этой системы определяется $u(t).$ Нетрудно видеть, что при выполнении условия (9) полученное состояние $x(t)$ является быстро убывающей функцией вида

$$x(t) = \sum_{\xi=0}^{r+p-1} \frac{\gamma_\xi}{(t+\Delta)^{\beta+\xi}} e^{-\omega t} + O(e^{-\omega t}),\ \ \gamma_\xi \in R^n.$$

Теорема 1. *При выполнении условия (9) существует управление* $u(t)$ *системы (1) со свойствами (3), под воздействием которого состояние* $x(t)$ *удовлетворяет условиям (2) и является быстро убывающей при* $t \to +\infty$ *функцией вида*

$$x(t) = \sum_{\xi=0}^{r+p-1} \frac{\gamma_\xi}{(t+\Delta)^{\beta+\xi}} e^{-\omega t} + O(e^{-\omega t}),\ \ \gamma_\xi \in R^n.$$

Число $\beta > 0$ введено для увеличения скорости убывания $x(t)$ при $t \to +\infty$, а $\Delta > 0$ для того, чтобы $x(t)$ не было очень большим при t достаточно малом.

Список литературы

1. *Zubova S. P., Le Hai Trung.* Construction of polynomial controls for linear stationary system with control points and additional constrains // Automation and Remote Control. – 2010. – Vol. 71. – No. 5. – P. 971–975.

2. *Шумилов В. Ф.* К проблеме управления плавной стыковкой режимов технологических процессов // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 7. – С. 53–61.

3. *Зубова С. П., Чан Тхань Туан.* Построение быстро убывающего решения неоднородной системы при наличии контрольных точек и условий на управление // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 11. – С. 29–37.

4. *Раецкая Е. В.* Условная управляемость и наблюдаемость линейных систем : дис. … канд. физ.-мат. наук. – Воронеж, 2004.

Tran Thanh Tuan, Postgraduate Student, Voronezh State University

A Method for Constructing Solution of the Linear Stationary Nonuniform Control System

The problem of controlling linear stationary nonuniform dynamic system with check points and conditions for control is considered. Functions of state and control that rapidly decrease at $t \to \infty$ *are constracted.*

Key words: control system, image, kernel, coker, semi-inverse matrix.